

Kosmologie der Allgemeinen Relativitätstheorie

Skript zum Seminar des Physikalischen Vereins
Frankfurt am Main
2015

Rainer Göhring

© 2015 R. Göhring r.goehring@arcor.de

Prinzipiell steht dieses Dokument unter dem Copyright des Autors, d.h. daß dieser einer weiteren Verbreitung zustimmen muß.

Das Kopieren und Verwenden des Dokumentes oder Teile daraus für Unterrichtszwecke ist ausdrücklich erlaubt, vorausgesetzt der Autor wird zitiert und dieses Dokument wird als Quelle angegeben. Für jede Art von Veröffentlichung und Weiterverbreitung (z.B. auf einer Homepage im Internet, auf einer Internetseite für Unterrichtsmaterialien, in Beiträgen zu wissenschaftlichen oder didaktischen Zeitschriften) ist die Erlaubnis des Autors einzuholen.

Eine kommerzielle Nutzung ist nicht (bzw. nur nach Absprache) möglich.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iii
Vorwort	v
1 Spezielle Relativitätstheorie	1
1.1 Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie	2
1.2 Die Lorentz-Transformation	8
1.3 Invariante raum-zeitliche Entfernung	11
1.4 Geometrie der Raumzeit	14
1.5 Grenzen der Speziellen Relativitätstheorie	20
2 Allgemeine Relativitätstheorie	23
2.1 Das Äquivalenzprinzip	24
2.2 Maßstäbe und Uhren in beschleunigten Bezugssystemen	29
2.3 Geometrie gekrümmter Räume	31
2.4 Einsteins Feldgleichungen	37
2.5 EINSTEINS Näherungslösungen der Feldgleichungen	44
2.6 SCHWARZSCHILDs exakte Lösung der Feldgleichungen	49
3 Kosmologische Modelle der Allgemeinen Relativitätstheorie	55
3.1 EINSTEINS kosmologisches Modell	58
3.2 DE SITTERS kosmologisches Modell	62
3.3 Die Lösungen von Friedmann und Lemaître	63
3.4 HUBBLES Entdeckung des expandierenden Universums	66
3.5 Expandierender Raum	71
3.6 Robertson-Walker Metrik und Kosmokinematik	77
3.7 Die Friedmann-Gleichung und Kosmodynamik	83
3.8 Kosmologische Modelle	94
3.8.1 FRIEDMANNsche Universen ($\Lambda = 0$)	95
3.8.2 Universen mit kosmologischem Parameter ($\Lambda \neq 0$)	102
3.9 Weltlinien, Entfernungen und Horizonte	104
3.10 Beobachtbare Größen	111
4 Das Standardmodell der Kosmologie	118
4.1 Beobachtende Kosmologie und Standardmodell	118
4.2 Das frühe Universum	127
4.2.1 Der Urknall	128
4.2.2 Phase der Inflation	135

4.2.3	„Größe“ des Universums – die Hubble-Sphäre	142
A	Metrik von Räumen konstanter Krümmung	148
A.1	2-dimensionale Mannigfaltigkeiten (Flächen)	148
A.2	3-dimensionale Mannigfaltigkeiten	150
B	Geometrie der Kugelfläche	153
C	Lichtablenkung im Schwerefeld der Sonne – Newton’sches Gesetz	156
D	Geometrische und Planck-Einheiten	159
E	Glossar	162
	Index	178
	Literaturverzeichnis	184

Vorwort

*„Ich habe schon wieder was verbrochen in der Gravitations-
theorie, was mich ein wenig in Gefahr setzt, in einem Toll-
haus interniert zu werden. Hoffentlich habt Ihr keines ...“*

Aus einem Brief Einsteins an Paul Ehrenfest, 4. Februar 1917

Diesen Satz hat EINSTEIN sicher nicht ganz ernst genommen, denn im Jahr 1916 hatte er nach vielen Mißerfolgen, Rückschlägen und immer wieder neuen Anläufen seine „Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie“ veröffentlicht [10] und war durchaus der Überzeugung, das Wesen der Gravitation damit ergründet zu haben. War er doch damit in der Lage die Periheldrehung des Merkur zu erklären und die Ablenkung des Lichtes ferner Sterne an der Sonne wertmäßig vorherzusagen¹. Als dann 1919 durch EDDINGTON anlässlich einer totalen Sonnenfinsternis diese Lichtablenkung in dem vorhergesagten Wert tatsächlich nachgewiesen werden konnte [8], wurde EINSTEIN zum vielgefragten Medienstar.

Knapp ein Jahr nach der Veröffentlichung der Allgemeinen Relativitätstheorie reicht EINSTEIN 1917 seine „Kosmologischen Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie“ bei der Preußischen Akademie der Wissenschaften ein [11]. Darin wandte er seine Feldgleichungen auf den Kosmos als Ganzes an, allerdings noch auf dem damaligen Weltbild der Astronomie basierend, das von einem (im Großen) zeitlich unveränderlichen und unendlichen Universum ausging. Er konnte eine Lösung seiner Feldgleichungen liefern, allerdings zu dem Preis, daß er für solch ein Universum seine Gleichungen um die kosmologische Konstante Λ erweitern mußte. Als etwa 10 Jahre später HUBBLE die Fluchtgeschwindigkeit der Galaxien nachwies, soll Einstein die Einführung der kosmologischen Konstante als seine größte Eselei bezeichnet haben. Ironie der Geschichte, heute spielt eben diese Konstante wieder eine wesentliche Rolle in der Kosmologie.

EINSTEIN hat 1917 mit dieser seiner Arbeit das Tor zur wissenschaftlichen Kosmologie aufgestoßen. Er hat den Anstoß gegeben, daß in der Folgezeit zahlreiche Physiker, Astrophysiker, Astronomen aber auch Mathematiker auf dem Gebiet forschten und beobachteten. Durch die zur gleichen Zeit aufkommende

¹Man kann durchaus mit der klassischen NEWTONschen Theorie die Lichtablenkung berechnen, der Wert für diese Ablenkung an der Sonne ist hier aber nur halb so groß wie EINSTEINS Wert. Die Berechnung findet sich im Anhang C.

Quantentheorie geriet die Kosmologie allerdings etwas ins Hintertreffen, was die Aufmerksamkeit der Physiker anbetraf, trotzdem wurden besonders auf dem Gebiet der Theorie wesentliche Fortschritte zum Verständnis der möglichen Entwicklung unseres Universums gemacht. Der große Durchbruch kam in den letzten Jahrzehnten des letzten Jahrhunderts, als mit der Errichtung von zahlreichen Großteleskopen, Hochleistungsrechnern und Satelliten Beobachtungen und Berechnungen möglich wurden, die wesentliche Aussagen der wissenschaftlichen Kosmologie bestätigten und erlaubten, ein durch astronomische Beobachtungen untermauertes *Standardmodell der Kosmologie* zu formulieren. Man spricht sogar schon von dem „Goldenen Zeitalter“ der Astrophysik.

Die Allgemeine Relativitätstheorie steht in dem Ruf, mathematisch extrem anspruchsvoll zu sein. Ist sie auch; selbst EINSTEIN hatte anfangs seine liebe Not mit der Differentialgeometrie, die er nutzen wollte, um seine Gedanken zur Gravitationstheorie mathematisch zu formulieren. Verzweifelt schrieb er an seinen Freund, den Mathematiker Grossmann: „Grossmann, Du mußt mir helfen, sonst werd’ ich verrückt“ (zitiert in [43] S. 241). Der physikalische Gehalt der Theorie ist aber durchaus auch für einen Laien verständlich, der mathematische und physikalische Kenntnisse auf dem Niveau der Oberstufe eines Gymnasiums mitbringt. Dieses Grundverständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie zu vermitteln, soll Gegenstand diese Skriptums und des Seminars sein. Bewußt werden dabei aber auch Formeln eingesetzt, denn mathematische Formeln sind nun mal die „Sprache“ der Physik; ein Laie kann nachvollziehen, was mit einer Formel ausgedrückt werden soll, wenn er sie auch nicht unbedingt bearbeiten kann. Das Skriptum und auch das Vorgehen im Seminar ist so angelegt, daß der historischen Entwicklung der Theorie und ihrer Weiterentwicklung gefolgt wird; das ist meiner Meinung nach dann einfacher nachzuvollziehen und zu verstehen als eine axiomatische Herleitung der Ergebnisse.

Im ersten Kapitel des Skriptums wird nochmals auf die Spezielle Relativitätstheorie eingegangen. Das geschieht aus zweierlei Gründen; zum einen ist die Allgemeine Relativitätstheorie eine Erweiterung der Speziellen, die sich ja „nur“ mit gleichförmig gegeneinander bewegte Inertialsystemen beschäftigt und die Bedeutung anders bewegter – beschleunigter – Koordinatensysteme vernachlässigt. Dennoch bleibt die Spezielle Relativitätstheorie auch in der Allgemeinen von Bedeutung, wenn es um die Physik in lokalen Inertialsystemen geht. Der zweite Grund ist einfach der, bestimmte Begriffe, wie die Metrik oder bestimmte Formalismen, für den späteren Gebrauch einzuführen. Dazu gehört vor allen die Geometrie der MINKOWSKISCHEN Raum-Zeit und die Darstellung von Weltlinien und Ereignissen (Events) im Raum-Zeit-Diagramm. In der Kosmologie sind solche Diagramme unverzichtbar, um das Verhalten kosmischer Objekte in ihrer Dynamik in Raum und Zeit zu visualisieren und so zu verstehen.

Das zweite Kapitel widmet sich zunächst dem Äquivalenzprinzip und den Gedankenmodellen EINSTEINS – frei fallender Fahrstuhl, Längenmessung auf

einer rotierenden Kreisscheibe –, die ihn zu der Überzeugung brachten, daß in seiner zu entwickelnden Theorie der Gravitation die Geometrie gekrümmter Räume eine entscheidende Rolle spielen muß. Ihr ist ein weiterer Teil gewidmet als Vorbereitung für die Beschreibung, wie EINSTEIN vorging, um seine berühmten Feldgleichungen herzuleiten. Seine Näherungslösungen dieser Gleichungen, mit denen er die Periheldrehung des Merkur, die Rotverschiebung im Schwerfeld und die Lichtablenkung an der Sonne berechnete, bildet einen weiteren Teil. Im letzten Teil des Kapitels wird die von KARL SCHWARZSCHILD für einzelne kugelsymmetrische Massen – z.B. Sterne oder schwarze Löcher – gefundene Lösung der Feldgleichungen besprochen.

Wichtige Themen der Allgemeinen Relativitätstheorie sind unter anderem auch die Physik schwarzer Löcher oder Gravitationswellen. Darauf soll aber nicht eingegangen werden, wir konzentrieren und daher im dritten Kapitel auf die Kosmologie. Die Entdeckung HUBBLES der allgemeinen Fluchtgeschwindigkeit der Galaxien und der daraus abgeleiteten Hypothese eines expandierenden Universums wird ein breiter Raum eingeräumt. Das kosmologische Prinzip wird eingeführt und für die drei verschiedenen Arten von Geometrien – Euklidische, sphärische und hyperbolische – werden in der Folge die wichtigsten kosmologischen Modelle, nach denen ein Universum sich zeitlich entwickeln könnte, theoretisch abgeleitet und besprochen. Wie „unser“ Universum sich letztendlich verhält, kann aber nur die astronomische Beobachtung klären; die wichtigen beobachtbaren Größen werden dazu in dem Kapitel 3.10 bestimmt.

Das aus den aktuellen Beobachtungen abgeleitete *Standardmodell der Kosmologie* ist Thema des vierten Kapitels. Dort gehen wir zunächst auf die Vorgänge im frühen Universum ein, die Zeitspanne beginnend mit dem Urknall über die inflationäre Phase des Universums bis zu dem Zeitpunkt, zu dem es durchsichtig wurde – der Zeitpunkt der Rekombination, nach ca. 380.000 Jahren. Letzteres Ereignis ist heute als Hintergrundstrahlung der Beobachtung zugänglich. In dieser frühen Phase des Universums spielen die Erkenntnisse der Hochenergiephysik eine entscheidende Rolle und müssen in die Überlegungen zur Kosmologie einbezogen werden. In der weiteren Entwicklung des Universums sind die Objekte – Galaxien, Galaxienhaufen etc. – bis auf die Zeitspanne des „dunklen Zeitalters“ (von ca. 380.000 bis etwa 400 Millionen Jahre) – der astronomischen Beobachtung zugänglich. Beobachtung von Objekten am Himmel ist gleichbedeutend mit einem Blick in die Vergangenheit. In Verbindung mit der Theorie ist es damit möglich, die zeitliche Entwicklung unseres Universums zu ergründen. Im letzten Teil des Kapitels wird schließlich auf die verschiedenen unabhängigen Messungen eingegangen, die das heute allgemein akzeptierte Modell unserer Welt plausibel machen. Dieses *Standardmodell der Kosmologie* ist eine konsistente Darstellung unseres Wissens, die Theorie und praktische Astronomie verbindet.

Um dem Vorsatz gerecht zu werden, möglichst wenig Mathematik in dem Hauptteil zu verwenden, wurden diejenigen Berechnungen, an denen mathematisch gebildete Leser im Detail interessiert sein könnten, in die Anhänge

verbannt. In Anhang A werden die Metriken konstant gekrümmter Räume hergeleitet, Anhang B gibt ein Beispiel für die Geometrie auf der Kugel­fläche, Anhang C erläutert, wie die Lichtablenkung mit der Newtonschen Theorie berechnet werden kann, und schließlich sind in Anhang D verschiedene geometrische und Planck-Einheiten aufgeführt.

Das vorliegende Skriptum ist eine Überarbeitung und Ergänzung des vorhergehenden. Die Herleitung der Friedmann-Gleichung im Rahmen der Kosmodynamik in Kapitel 3.7 wurde grundlegend überarbeitet, um den Lösungsweg noch deutlicher herauszuarbeiten. Außerdem wurden die neuesten Ergebnisse der PLANCK-Mission [2] eingearbeitet. Erweitert wurde das Skriptum um ein umfangreiches Glossar, in dem die wesentlichen Begriffe neben ihrer englischen Übersetzung nochmal kurz erläutert werden.

Ich danke dem Physikalischen Verein Frankfurt und insbesondere seinem Wissenschaftlichen Direktor, Prof. Dr. Bruno Deiss, für die Möglichkeit, die Allgemeine Relativitätstheorie und die Kosmologie einem breiten Publikum im Rahmen des Seminars vortragen zu können. Weiterhin danke ich den Mitarbeiter und Mitgliedern des Vereins, die die organisatorischen Rahmenbedingungen für das Seminar geschaffen haben. Frau Dr. Zimmermann und meiner Tochter Sonja danke ich für das geduldige Korrekturlesen. Meiner Frau danke ich für die Nachsicht, daß ich während der Vorarbeiten zu dem Seminar und Skriptum manchmal nur physisch zu Hause anwesend war.

Frankfurt am Main, Oktober 2013
Rainer Göhring

Kapitel 1

Spezielle Relativitätstheorie

Mit seinem Artikel „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ [15] revolutionierte ALBERT EINSTEIN im Jahr 1905 die Vorstellungen über Raum und Zeit, die seit ISAAC NEWTON als selbstverständlich galten. In seinem Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* hatte er die absolute Zeit und den absoluten Raum definiert(zitiert aus [37] S. 216 ff.):

Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgend einen äußeren Gegenstand. Sie wird auch mit dem Namen Dauer belegt.

Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich.

IMANUEL KANT hatte die absolute Zeit und den absoluten Raum zu apriori Denkkategorien erklärt, die nicht durch Schlußfolgerungen bewiesen und auch nicht durch Beobachtungen belegt werden können.

EINSTEIN aber widerlegte durch seine Schlußfolgerungen in der oben zitierten Veröffentlichung den absoluten Charakter von Raum und Zeit, durch zahlreiche Experimente wurde schließlich seine Spezielle Relativitätstheorie immer wieder bestätigt. Basierend auf den beiden Grundannahmen dieser Theorie¹

1. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist für alle gleichförmig gegeneinander bewegten Systeme gleich groß.
2. In allen gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen gelten durchweg die gleichen Naturgesetze.

konnte er zeigen, daß für Inertialsysteme – Bezugssysteme, in denen das Trägheitsgesetz gilt, – jeweils eigene „Zeiten“ und „Räume“ gültig sind. Der Übergang von einem Inertialsystem auf ein anderes, oder anders ausgedrückt: von einem Koordinatensystem auf ein anderes, wird hier durch die Lorentz-Transformation beschrieben (siehe weiter unten). Eine absolute Gleichzeitigkeit, wie noch von NEWTON postuliert und Basis der Galilei-Transformation, existiert nicht mehr.

¹zitiert aus [16] S. 189

Trotz des überwältigenden Erfolgs dieser Theorie ist eine wesentliche Einschränkung unverkennbar: es werden ausschließlich Bezugssysteme betrachtet, die sich geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegeneinander bewegen – Inertialsysteme. EINSTEIN war sofort bewußt, daß die Bevorzugung von Inertialsystemen gegenüber anders bewegten – beschleunigten – Koordinatensystemen eine künstliche war (siehe dazu z.B. [14] S. 150 ff.). Der Versuch, das Gravitationsgesetz im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie zu behandeln, scheiterte, was ihn davon überzeugte, daß eine vernünftige Theorie der Gravitation nur durch eine Erweiterung dieser Theorie zu erreichen war. Die Arbeiten daran zogen sich von 1907 bis 1915 hin, bis endlich am 4. November 1915 die entscheidende Abhandlung „Zur Allgemeine Relativitätstheorie“ der Akademie der Wissenschaft in Berlin vorgelegt werden konnte (veröffentlicht in [10]).

Bevor wir zum eigentlichen Thema dieses Skriptums – der Allgemeinen Relativitätstheorie – kommen, sollen zunächst nochmals einige wichtige Fakten der Spezielle Relativitätstheorie angeführt werden; zur Rekapitulation von Bekanntem oder auch einfach zur Einführung, um eine Basis zu haben für das eigentliche Thema der Allgemeinen Relativitätstheorie (ausführlich wird die Spezielle Relativitätstheorie in den einschlägigen Lehrbüchern z.B. in [6] oder in dem Skriptum [20] behandelt). Wir werden später noch sehen, daß die Spezielle Relativitätstheorie selbst in der Allgemeinen noch eine bedeutende Rolle spielt. Bei dieser Übersicht werden wir uns vor allem auf die geometrischen Aspekte konzentrieren, denn die Geometrie – speziell die Geometrie nicht-euklidischer Räume – ist die Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie.

1.1 Grundlagen der Speziellen Relativitätstheorie

ALBERT EINSTEIN konnte aufgrund der experimentell gesicherten Tatsache, daß die Lichtgeschwindigkeit in allen zueinander geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegten Systeme – Inertialsysteme – gleich ist, zeigen, daß in ihnen die gleichen Naturgesetze gelten (wir werden sehen, daß das für das Gravitationsgesetz nicht der Fall ist!). Solch ein Inertialsystem wird durch ein Koordinatensystem repräsentiert, das neben den räumlichen Koordinaten (x, y, z) auch die Zeit t enthält, man spricht deshalb auch von einem Raum-Zeit-Diagramm. Damit diese Raum-Zeit-Diagramme „inertial“ genannt werden können, müssen sie folgende Eigenschaften erfüllen (siehe [53] S. 4):

1. Die Entfernung zwischen dem Punkt P_1 mit den Koordinaten (x_1, y_1, z_1) und dem Punkt P_2 mit dem Koordinate (x_2, y_2, z_2) ist unabhängig von der Zeit.
2. Uhren, die in jedem Punkt sitzend gedacht werden können, und die Zeit t anzeigen, sind synchronisiert und zeigen überall die gleiche Zeit an.
3. Die Geometrie des Raumes ist zu jedem Zeitpunkt Euklidisch.

Ein Verfahren, wie man sich die Synchronisation aller dieser Uhren vorstellen könnte, hat schon EINSTEIN in seiner ersten Arbeit zur Speziellen Relativitäts-

theorie [15] gegeben. Wichtig ist auch die Tatsache, daß Uhren nur synchron gehalten werden können, wenn sie nicht beschleunigt sind.

Wenn sich zwei Inertialsysteme S und \bar{S} geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit v gegeneinander bewegen, so kann man die sie beschreibenden Koordinatensysteme so wählen, daß alle Achsen parallel zueinander sind und beide x-Achsen in Richtung der Geschwindigkeit zeigen, wie die Abb. 1.1 zeigt. Ein Raum-Zeit-Diagramm mit drei Raumkoordinaten und einer Zeitkoordina-

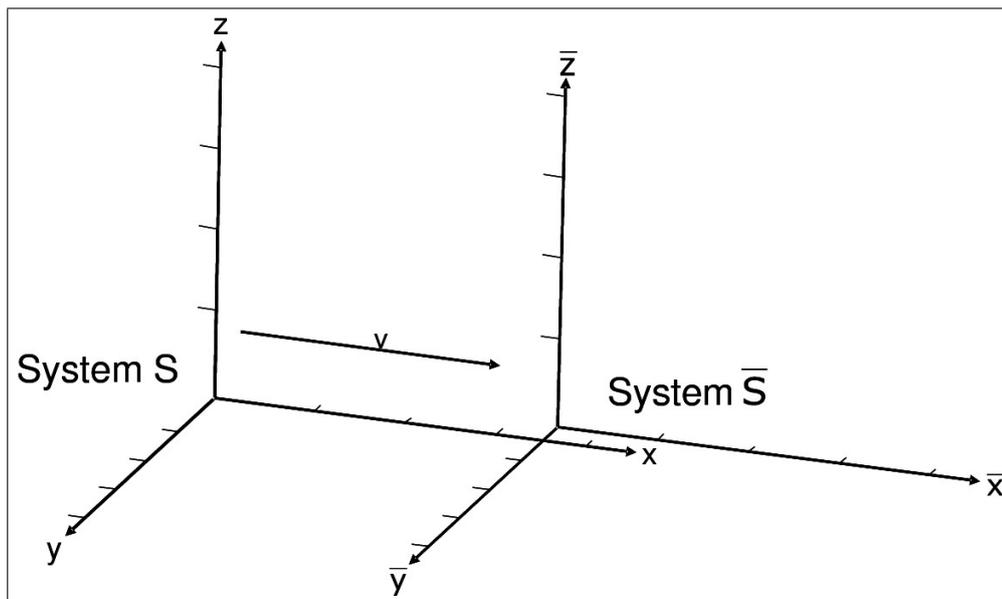


Abbildung 1.1: Zwei Inertialsysteme, die sich mit der Geschwindigkeit v gegeneinander bewegen. Erläuterung im Text.

te würde eine vierdimensionale Darstellung erfordern. Aus diesem Grund läßt man üblicherweise die y - und z -Koordinaten außer acht und betrachtet nur die x,t -Ebene als Raum-Zeit-Diagramm, um die wesentlichen Konzepte der Theorie anschaulich zu machen. Das ist deshalb möglich, da die y - und z -Achsen von der Lorentz-Transformation nicht betroffen sind. Würden nun in diesem x,t -Diagramm die Einheiten der Achsen z.B. als 1 m für die x -Achse und 1 sec für die t -Achse gewählt, dann wäre die Weltlinie eines Lichtstrahls, der vom Ort $x = 0$ in positiver x -Richtung ausgeht, wegen der Größe des Betrages der Lichtgeschwindigkeit von der x -Achse nicht zu unterscheiden. Um nun die Ausbreitung des Lichtes, oder auch Bewegungen von Objekten mit einer Geschwindigkeit in der Größenordnung der des Lichtes in dem Raum-Zeit-Diagramm vernünftig darstellen zu können, wählt man als Maß auf der Zeitachse nicht die Zeit t selbst, sondern die Größe $c \cdot t$ mit der Dimension [m]. Die Einheit $c \cdot t = 1$ m entspricht nun der kleinen Zeiteinheit $t = 1/300.000$ sec. Am Rande sei erwähnt, daß heute sehr oft in der Literatur zur Relativitätstheorie und Kosmologie der Betrag der Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt wird (siehe z. B. [41] oder [53])² mit dem Argument, die Einheiten „Meter“ und „Se-

²In [41] wird sogar noch weiter gegangen, indem auch die Gravitations- und die Boltz-

kunde“ seien ja auch vollkommen willkürlich, warum sollte man daher c nicht gleich dimensionslos eins setzen, wenn dadurch die Formeln kürzer werden. Durch diese Konvention ergeben sich dann gewöhnungsbedürftige Einheiten – sie werden „geometrische Einheiten“ genannt – nicht nur für Zeit und Entfernung

$$c = 3 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-1} = 1$$

$$1 \text{ s} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

$$1 \text{ m} = \frac{1}{3 \cdot 10^8} \text{ s}$$

sonder natürlich auch für andere Einheiten, wie z.B. Joules, Newton u.a. Im Anhang D sind weitere Beispiele von Werten in geometrischen Einheiten verschiedener Konstanten aufgeführt. Im Folgenden werden wir uns aber nicht an diese Konvention halten.

Mit den eben besprochenen Konventionen stellt sich nun ein Raum-Zeit-Diagramm wie in Abb. 1.2 dargestellt dar. Jeder Punkt in dem Diagramm

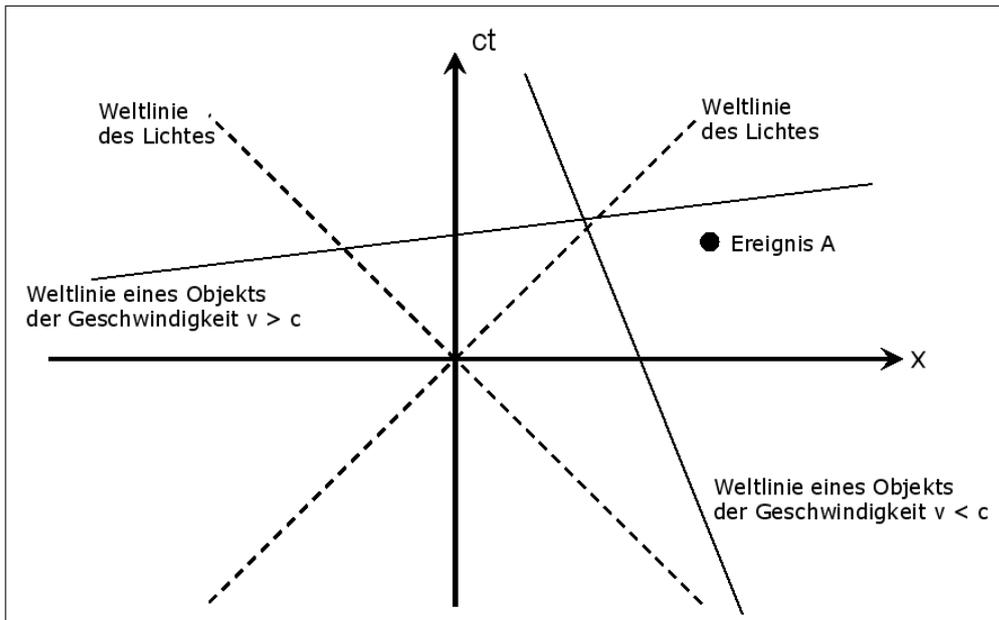


Abbildung 1.2: Raum-Zeit-Diagramm. Erläuterung im Text.

repräsentiert ein Ereignis oder Event, das zu einem bestimmten Zeitpunkt t an einem bestimmten Ort x stattfindet; der Punkt in der Abb. 1.2 ist solch ein konkretes „Ereignis A“. Bewegte Objekte werden in dem Raum-Zeit-Diagramm durch Weltlinien dargestellt – eine Folge von Ereignissen, während deren sich das Objekt gerade zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort befindet. Eine gleichförmige Bewegung, mit konstanter Geschwindigkeit, wird dann zu einer Geraden; ist die Geschwindigkeit $v < c$, so ist die Neigung gegen die ct -Achse kleiner 45° , im anderen Fall $v > c$ –

mannkonstante gleich eins gesetzt werde.

eigentlich verboten! – ist die Neigung größer 45° , wie die beiden Weltlinien in Abb. 1.2 zeigen. Weltlinien von Lichtstrahlen – Photonen –, die von der Position $x = 0$ in positiver und negativer ausgehen, schließen mit der positiven ct -Achse einen Winkel von 45° ein; analog sind die Weltlinien der Strahlen, die bei der Position $x = 0$ aus der Vergangenheit ($t < 0$) ankommen, schließen mit der negativen ct -Achse den Winkel von 45° ein. Da die Lichtgeschwindigkeit eine Grenzgeschwindigkeit ist, kann man konstatieren, daß alle Ereignisse, die zukünftig erreichbar oder irgendwie physikalisch beeinflussbar sind, in dem „oberen“ Dreieck zwischen den Weltlinien des Lichtes liegen, und alle Ereignisse, von denen wir Kenntnis oder Wirkung erlangen, liegen in dem „unteren“ Dreieck. Für die Weltlinien des Lichtes haben sich die

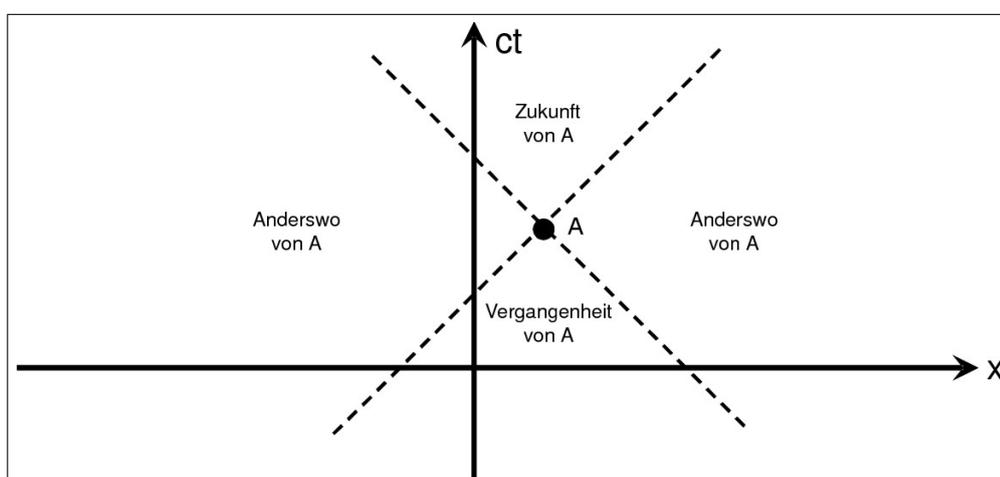


Abbildung 1.3: Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel eines Ereignisses A . Erläuterung im Text.

auf den ersten Blick verwirrenden Ausdrücke *Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel* eingebürgert. Der Begriff „Kegel“ wird verständlich, wenn man nicht nur die x, ct -Ebene betrachtet, sondern auch noch die zweite Raumkoordinate – die y -Achse mit einbezieht. In diesem Fall bilden die Weltlinien aller Lichtstrahlen die vom Ursprung ($x = y = 0$) ausgehen den *Vorwärtslichtkegel*, alle Weltlinien der Strahlen, die im Ursprung ankommen, den *Rückwärtslichtkegel*. Nicht ganz folgerichtig spricht man also auch im Falle der x, ct -Ebene von Kegeln. Eine Darstellung mit allen drei Raumkoordinaten ist dann natürlich nicht mehr in einem Raum-Zeit-Diagramm darstellbar. Diese Betrachtungsweise ist grundlegend für die Relativitätstheorie, weswegen zwei weitere Beispiele nach [53] angeführt werden sollen. In dem Raum-Zeit-Diagramm der Abb. 1.3 stellt A ein Ereignis an einem bestimmten Ort x_A und zu einer bestimmten Zeit t_A dar. Das „Jetzt“ oder die Gegenwart von A ist A selbst! Alle Ereignisse der Vergangenheit, von denen A Kenntnis erlangen kann, liegen im Rückwärtslichtkegel. Alle zukünftigen Ereignisse von A , die beeinflusst oder erreicht werden können, liegen im Vorwärtslichtkegel. Von den Bereichen im Raum-Zeit-Diagramm, durch „Anderswo von A “ in Abb. 1.3 gekennzeichnet, kann A nie Kenntnis erlangen. Zwei Ereignisse, wie in Abb. 1.4 dargestellt,

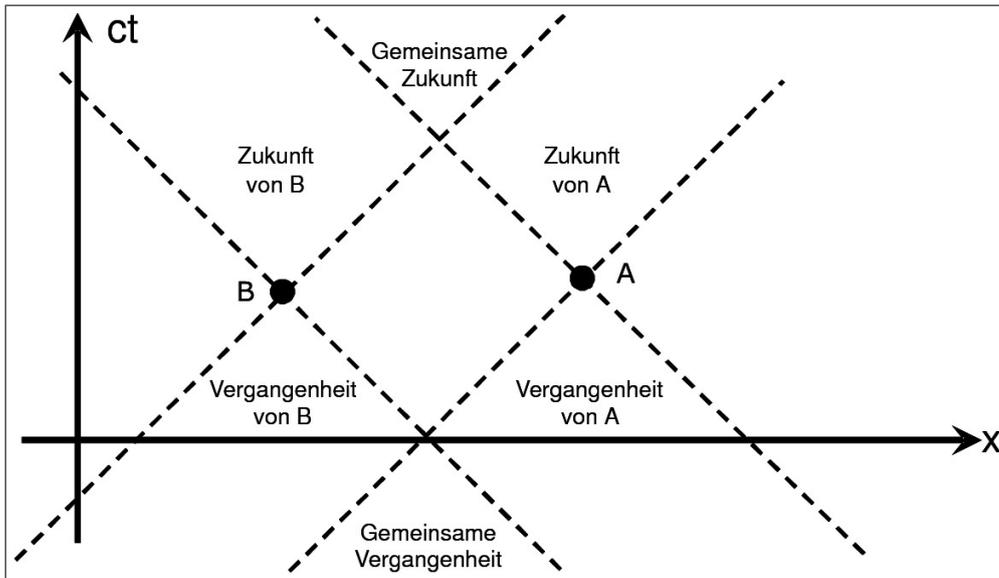


Abbildung 1.4: Vorwärts- und Rückwärtslichtkegel zweier Ereignisse; sie können durchaus eine Zukunft und Vergangenheit gemeinsam haben. Erläuterung im Text.

haben jeweils ihre eigenen Lichtkegel, trotzdem können sie sich in einer gemeinsamen Zukunft und Vergangenheit überlappen.

EINSTEIN stellte sich solch einen dreidimensionalen Raum, das Koordinatensystem, als ein Gitter mit starren Stäben vor, die an jedem Schnittpunkt Uhren tragen. In dem Raum-Zeit-Diagramm der x,t -Ebene kann man sich das wie in der Abb. 1.5 dargestellt vorstellen. Die in der Relativitätstheorie immer wieder benutzte Floskel *Beobachtung* beschreibt die Tatsache, daß an einem bestimmten Ort mit den Koordinaten (x, y, z) ein Ereignis zum Zeitpunkt t eintritt. Es ist *nicht* damit gemeint, daß eine Person am Ort $(0,0,0)$ auf seine Uhr schaut, die Zeit t abliest und dabei das Ereignis gerade feststellt. Letzteres entspricht einer visuellen Beobachtung: das Auge oder der Fotoapparat registriert die Lichtstrahlen, die von den Ereignissen oder Objekten ausgehen und gleichzeitig eintreffen. Das ist das Thema der Visualisierung relativistischer Vorgänge (siehe dazu z.B. [20] oder [28]), das aber nicht gemeint ist, wenn in der Relativitätstheorie von Beobachtungen und Beobachter gesprochen wird. Wenn geschrieben wird, daß „... ein Beobachter in einem Inertialsystem sieht...“, dann ist vielmehr gemeint, daß er gleichzeitig alle anderen Ereignisse auch feststellen kann, die sich zur selben Zeit t ereignen. Bildlich gesprochen drückt das aus, daß der Beobachter dann alle die Ereignisse registrieren kann, die auf der Parallelen zur x -Achse mit einem bestimmten Wert von t in Abb. 1.5 liegen; letztendlich wird mit dem Begriff *Beobachtung* bei der Relativitätstheorie ein Meßvorgang beschrieben. Der Begriff *Beobachter* wird dann nicht ganz schlüssig gleichgesetzt mit Bezugssystem oder Inertialsystem.

Betrachten wir nun ein zweites Inertialsystem (Beobachter) \bar{S} , so nehmen

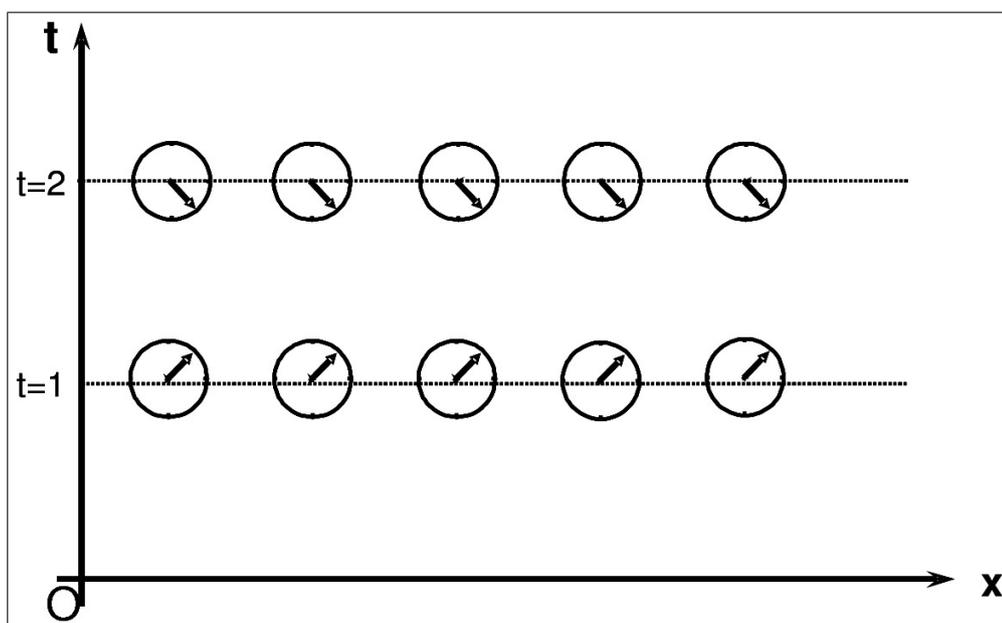


Abbildung 1.5: Gleichzeitige Ereignisse. Erläuterung im Text.

wir an, es bewegt sich, wie in Abb. 1.1 dargestellt, mit der Geschwindigkeit v parallel zur x -Achse des Systems S so, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\bar{t} = 0$ die Nullpunkte der beiden Koordinatensysteme genau zusammenfallen. Wie in Abb. 1.6 dargestellt, ist die Weltlinie aller Orte mit konstantem $\bar{x} = 0$ (gleiches gilt natürlich auch für $\bar{y} = \bar{z} = 0$, was wir aber außer acht lassen können) die $c\bar{t}$ -Achse des Inertialsystems \bar{S} , eine Gerade, die mit der ct -Achse von S den Winkel α einschließt. In der Zeit $t_A = 1/c$ bewegt sich das Bezugssystem \bar{S} um die Entfernung $\overline{AB} = v \cdot t_A$ relativ zu S . Die Strecke \overline{AB} entspricht also dem Betrag v/c und für den Winkel α ergibt sich demnach $\tan \alpha = v/c$. Auf diese Weise läßt sich für jede beliebige Geschwindigkeit v zunächst die $c\bar{t}$ -Achse für das Bezugssystem \bar{S} graphisch ermitteln. Die zugehörige \bar{x} -Achse erhalten wir, indem wir uns an die EINSTEINSche Prämisse erinnern, daß in allen Inertialsystemen die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, unabhängig davon wie schnell sie sich relativ zueinander bewegen. Im Bezugssystem S ist die Weltlinie des Lichtes die Winkelhalbierende; wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit muß das auch für \bar{S} gelten: die Weltlinie des Lichtes ist dort ebenfalls die Winkelhalbierende. Für die Konstruktion der \bar{x} -Achse müssen wir daher nur die $c\bar{t}$ -Achse an der Weltlinie des Lichtes spiegeln, um das Koordinatensystem zu erhalten. Die beiden Raum-Zeit-Diagramme zeigen deutlich, daß in der Speziellen Relativitätstheorie keine universelle, sondern nur eine relative Gleichzeitigkeit gilt, denn die gleichzeitigen Ereignisse in \bar{S} (z.B. die \bar{x} -Achse, ist die die Weltlinie aller gleichzeitigen Ereignisse in \bar{S} , die die Zeit $\bar{t} = 0$ repräsentieren) sind nicht gleichzeitig in S .

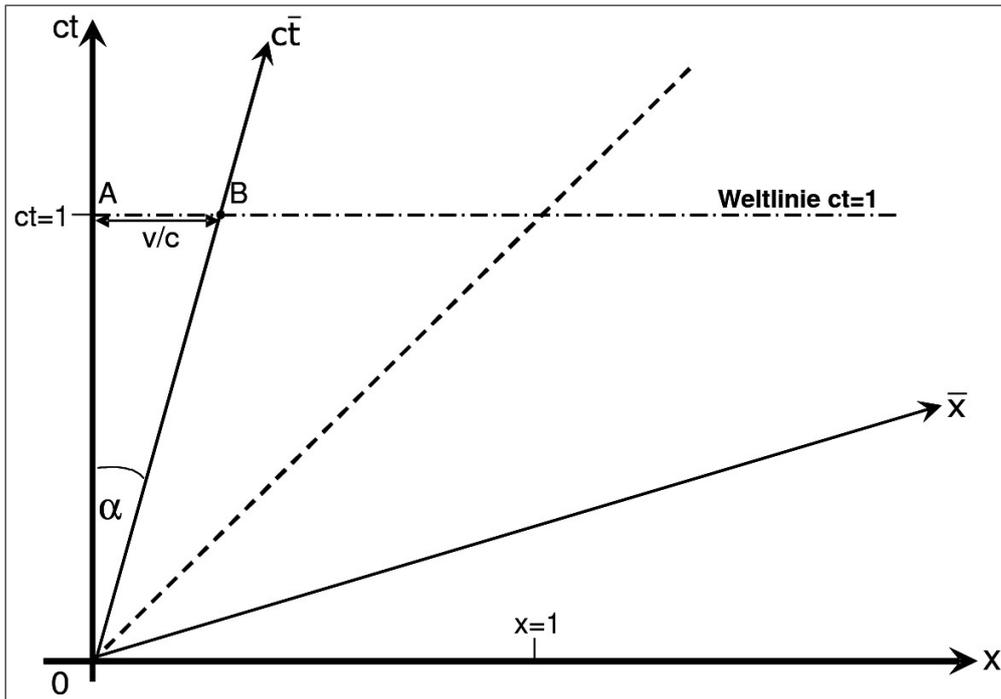


Abbildung 1.6: Raum-Zeit-Diagramme zweier mit der Geschwindigkeit v gegeneinander bewegter Inertialsysteme. Erläuterung im Text.

1.2 Die Lorentz-Transformation

Stellen wir uns vor, vom Ursprung des Koordinatensystems S mit den Koordinaten x, y, z gehe ein kurzes Lichtsignal aus. Dieses Signal breitet sich kugelförmig im Raum aus. Die Oberfläche der „Lichtkugel“ wird durch die Funktion

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

beschrieben. Der Radius r dieser Kugel vergrößert sich mit Lichtgeschwindigkeit im Laufe der Zeit t entsprechend der Beziehung $r(t) = c \cdot t$. Für die Oberfläche der „Lichtkugel“ ergibt sich demnach

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$

Natürlich sind hier die Komponenten x, y, z von der Zeit abhängig, der Übersichtlichkeit halber wurde das im obigen Ausdruck weggelassen. Den letzten Ausdruck können wir auf die Form

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 \cdot t^2 = 0 \tag{1.1a}$$

bringen.

Obiger Vorgang der Lichtausbreitung von dem System \bar{S} aus beobachtet, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v z.B. parallel der x -Achse bewegt,

muß wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum eine analoge Gleichung ergeben:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 - c^2 \cdot \bar{t}^2 = 0. \quad (1.1b)$$

Die beiden Gleichungen (1.1a) und (1.1b) müssen sich bei der Transformation der Raumkoordinaten und der Zeit beim Übergang von S auf \bar{S} (oder umgekehrt) gegenseitig bedingen. Oder anders ausgedrückt, die gesuchten Transformationsgleichungen müssen so beschaffen sein, daß die obigen Ausdrücke invariant sind. Das bedeutet aber auch, daß die Zeit t nicht wie bei NEWTON universell ist, sondern nur lokal in dem entsprechenden System gilt, und beim Übergang von einem zum anderen System mit transformiert werden muß.

Rein formal lassen sich nun aus den beiden Beziehungen 1.1a und 1.1b die Gleichungen ableiten, die die Transformation beschreiben (siehe dazu z.B. [32]). Hier soll das nicht nachvollzogen werden, wir zitieren einfach das Ergebnis, die Lorentz-Transformation (wir übernehmen hier die heute international übliche Notation für die Bezeichnung von transformierten Bezugssystemen und Koordinaten durch einen Überstrich, z.B. \bar{x}):

$$\bar{x} = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.2a)$$

und für die Umkehrtransformation entsprechend

$$x = \frac{\bar{x} + v\bar{t}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad y = \bar{y}, \quad z = \bar{z}, \quad t = \frac{\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1.2b)$$

Zur kürzeren Schreibweise bei zukünftigen Anwendungen führen wir noch die Größe k ein:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.2c)$$

Diese Formeln sind die Basis für die Berechnung all der bekannten Phänomene der Speziellen Relativitätstheorie wie z.B. der Lorentz-Kontraktion, der Zeitdilatation oder dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Diese Themen sollen aber hier nicht weiter vertieft werden (zu Details dazu siehe [20]), wir wollen uns vielmehr auf die Geometrie des Raum-Zeit-Diagramms konzentrieren.

Ähnlich wie die oben genutzten Formeln 1.1a und 1.1b invariant sind – dies war ja schließlich die Voraussetzung zur Ableitung der Lorentz-Transformation, so läßt sich auch sehr leicht zeigen, daß der Ausdruck (hier in der 2-dimensionalen x, ct -Ebene)

$$x^2 - (ct)^2 = F \quad (1.3)$$

ebenfalls invariant gegenüber der Lorentz-Transformation ist (F ist eine Konstante mit der Dimension einer Fläche). Dazu nutzt man die Transformationsgleichungen (1.2a) und erhält nach einfachen Umformungen

$$x^2 - (ct)^2 = (\bar{x})^2 - (c\bar{t})^2 \quad (1.4)$$

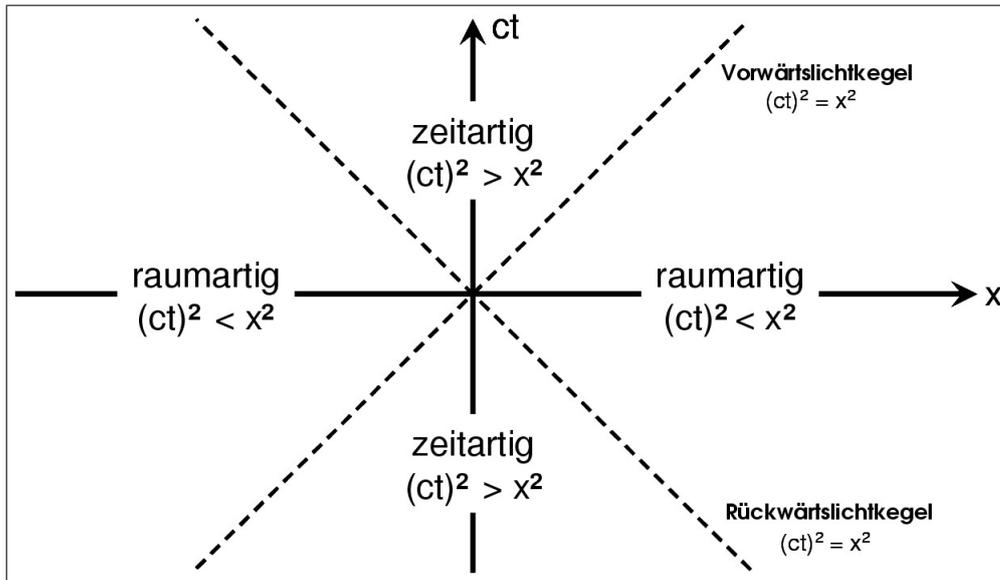


Abbildung 1.7: Raum- und zeitartige Bereiche im Raum-Zeit-Diagramm; Erläuterung im Text

Der Wert der Konstanten F ist zwar für jeden Punkt – Event – des Raum-Zeit-Diagramms anders, aber immer ist dieser Wert beim Übergang von einem System S zu einem System \bar{S} der selbe, er ist invariant. Er hat auch unterschiedliche Vorzeichen, je nachdem in welchem Bereich des x, ct -Koordinatensystems der Punkt sich befindet. Entsprechend der Abb. 1.7 haben sich für die verschiedenen Bereiche bestimmte Begriffe eingebürgert. Die Bereiche innerhalb des Vorwärts- und des Rückwärtslichtkegels werden „zeitartig“, die anderen Bereiche „raumartig“ genannt. Für die beiden Bereiche gelten unterschiedliche Vorzeichen für die Größe F , wie man leicht verifizieren kann:

$$\text{zeitartig: } (ct)^2 > x^2 \Rightarrow F < 0 \quad (1.5a)$$

$$\text{raumartig: } (ct)^2 < x^2 \Rightarrow F > 0 \quad (1.5b)$$

und auf beiden Lichtkegeln gilt

$$(ct)^2 = x^2 \Rightarrow F = 0 \quad (1.5c)$$

Bestimmen wir in einem beliebigen Punkt der x, ct -Ebene des Systems S (er entspricht einem Ereignis) den Wert von F , so kennen wir wegen der Invarianz von (1.3) ihn auch in der $\bar{x}, c\bar{t}$ -Ebene des Systems \bar{S} . Dies gilt natürlich auch umgekehrt.

Damit haben wir nun eine Möglichkeit, auch die Einheiten in dem Koordinatensystem von \bar{S} zu bestimmen. Wir hatten ja am Beispiel der Abb. 1.6 festlegen können wie die Achsen von \bar{S} relativ zu denen von S liegen, aber wo auf der \bar{x} -Achse der Punkt $\bar{x} = 1$ oder auf der $c\bar{t}$ -Achse der Punkt $c\bar{t} = 1$ liegen, war noch unbestimmt. Dazu müssen wir nur die Lage der Punkte im

Raum-Zeit-Diagramm von S finden, für die die Größe F den Wert ± 1 hat. Beide Vorzeichen sind wichtig, denn wir benötigen die Orte sowohl im zeitartigen als auch im raumartigen Bereich:

$$x^2 - (ct)^2 = \pm 1$$

Dies ist eine Gleichung für Hyperbeln in den beiden Bereichen

$$\text{raumartig} : ct = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{zeitartig} : ct = \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Der Schnittpunkt des positiven Astes der Hyperbel in dem Vorwärtslichtkegel mit der $c\bar{t}$ -Achse des Bezugssystems \bar{S} bestimmt den Punkt $c\bar{t} = 1$, analoges gilt für den raumartigen Bereich zur Bestimmung des Punktes $\bar{x} = 1$ auf der \bar{x} -Achse – Abb. 1.8. Diese Hyperbeln dienen zur Eichung der Koordinatenachsen von Koordinaten gegeneinander bewegter Inertialsystemen; sie werden daher auch Eichhyperbeln genannt. Abb. 1.8 stellt die Eichung für die Koordinaten eines Inertialsystems \bar{S} dar, das sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit v gegenüber S bewegt. Für ein System größerer Geschwindigkeit z.B. schließt die $c\bar{t}$ -Achse einen größeren Winkel mit der ct -Achse ein, mit der Folge, daß der Punkt $c\bar{t} = 1$ weiter entfernt vom Ursprung liegt; gleiches gilt dann aber auch für den Punkt $\bar{x} = 1$, da die \bar{x} -Achse spiegelbildlich zur Weltlinie des Lichtes den gleichen Winkel bildet. Die Abstände der Punkte $\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i$, $i = 1, 2, \dots$ auf der \bar{x} -Achse sind äquidistant; gleiches gilt für die der $c\bar{t}$ -Achse.

1.3 Invariante raum-zeitliche Entfernung

Die raum-zeitliche Entfernung zweier Ereignisse ist eine der wichtigsten Größen in der Relativitätstheorie, denn sie ist invariant gegenüber der Lorentz-Transformation; wir werden später sehen, daß das auch generell gilt. Um das zu zeigen, betrachten wir das zeitartige Ereignis A in der Abb. 1.9. Aus dem letzten Kapitel wissen wir, daß jedem Ereignis in dem x, ct -Diagramm ein Wert F (Gleichung 1.3) zugeordnet ist und von dem wir auch schon wissen, daß er invariant ist:

$$F = x^2 - (ct)^2$$

in unserem Beispiel der Abb. 1.9 haben wir demnach

$$F(A) = (x(A))^2 - (ct(A))^2$$

Das Ereignis A liegt im zeitartigen Bereich und damit ist $F < 0$. In Anlehnung an die Euklidische Geometrie können wir nun F als Quadrat der Entfernung s des Punktes A von Ursprung des Koordinatensystems oder auch als „Länge oder Betrag“ des Vektors \vec{OA} ansehen. In dem Raum-Zeit-Diagramm, das hier vorliegt, gilt aber nicht die Euklidische sondern die pseudo-Euklidische Geometrie; d.h. in dem „rechtwinkligen“ Dreieck mit der Hypotenuse s und den Katheten der Länge $x(A)$ und $ct(A)$ gilt der „Pythagoras“ im Sinne der obigen Gleichung. Im Gegensatz zur Euklidischen Geometrie hat nämlich hier das Quadrat der ct -Komponente das negative Vorzeichen. Die x - und ct -Achsen

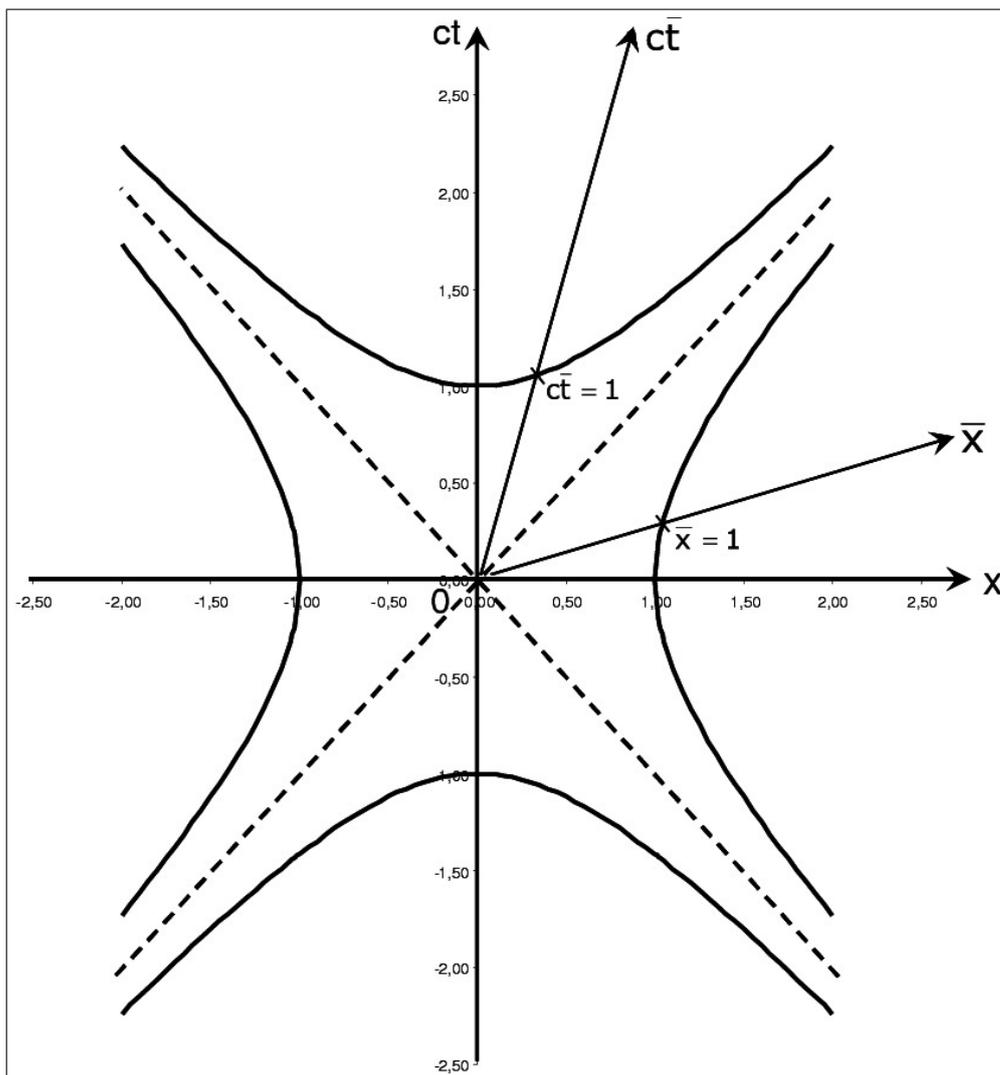


Abbildung 1.8: Eichhyperbel zur Bestimmung der Einheitspunkte im Raum-Zeit-Diagramm gegeneinander bewegter Inertialsysteme; Erläuterung im Text

stehen nicht im Euklidischen Sinne aufeinander senkrecht, sondern im Sinne der pseudo-Euklidischen Geometrie.

Analog zu dem, was wir eben beschrieben haben, können wir auch die Entfernung zweier Ereignisse A und B im Raum-Zeit-Diagramm beschreiben in der Form:

$$\overline{AB} = (\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2$$

Daß die Größe $(\Delta s)^2$ gegenüber der Lorentz-Transformation invariant ist, läßt sich einfach durch Einsetzen der Gleichungen (1.2a) zeigen.

Ganz allgemein gilt für die *invariante* vierdimensionale raum-zeitliche Ent-

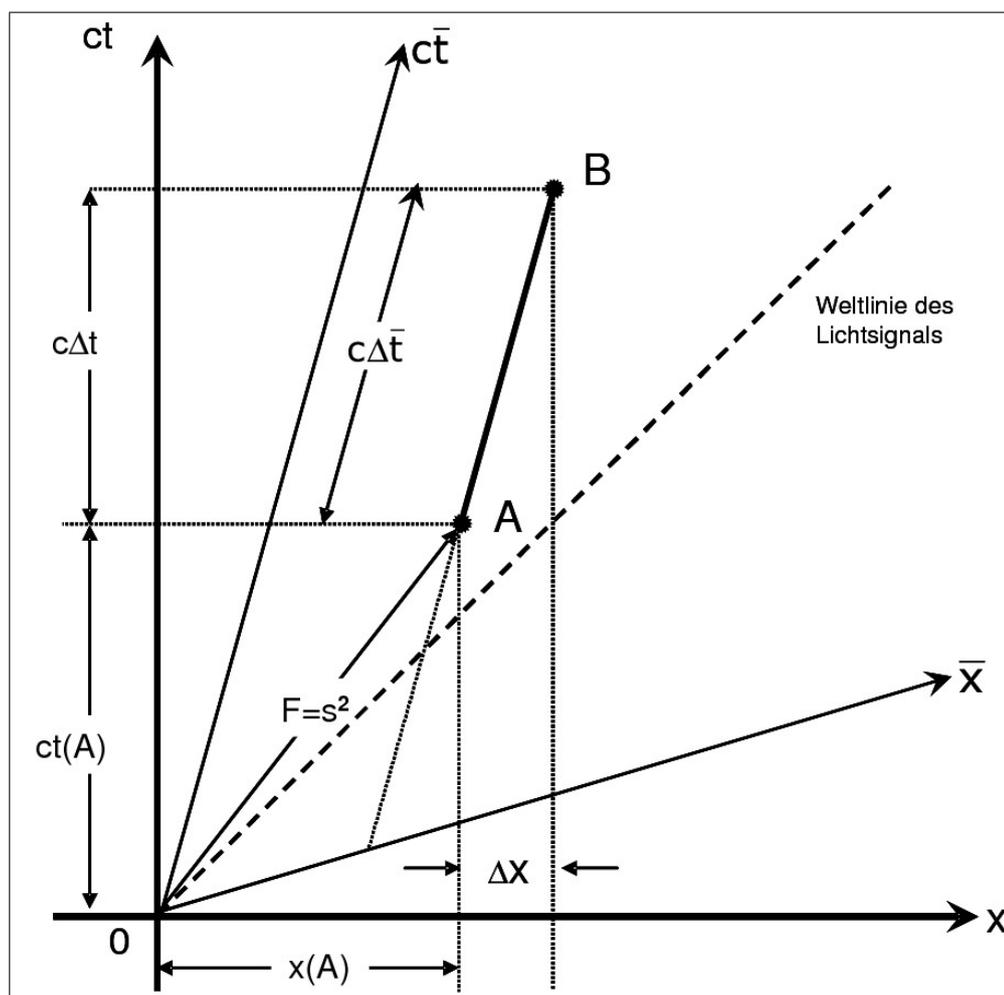


Abbildung 1.9: Zur raum-zeitlichen Entfernung; Erläuterung im Text

fernung zweier Ereignisse:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2 \quad (1.6a)$$

Für infinitesimale Entfernungen zwischen den beiden Ereignissen können wir Δs durch ds ersetzen; gleiches gilt natürlich für die anderen Koordinaten. Formal ganz korrekt müßten wir dann für $(\Delta s)^2$ entsprechend $(ds)^2$ schreiben; wir halten uns aber im Weiteren an die heute allgemein übliche Schreibweise ds^2 , womit wir schließlich die Beziehung

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2 \quad (1.6b)$$

erhalten. Bei diesen Gleichungen ist zu berücksichtigen, daß die Größe ds^2 – sie hängt ja schließlich mit dem Wert F zusammen – für die unterschiedlichen Bereiche des Raum-Zeit-Diagramms unterschiedliche Vorzeichen hat: im zeitartigen ist sie negativ, im raumartigen dagegen positiv. Würde man also nach der obigen Formel (1.6b) $ds = \sqrt{ds^2}$ bestimmen, erhielte man einen imaginären

Wert. Führt man also im zeitartigen Bereich Berechnungen durch – was ja der einzig physikalisch relevante Bereich ist, so multipliziert man daher vor der Bestimmung des Wurzelausdruckes beide Seiten mit -1 und ist damit sicher, keine imaginären Ausdrücke zu erhalten. Eine andere Variante, die man in der Literatur häufig antrifft (siehe z.B. [26]), führt einen Parameter ε ein, der dafür sorgen soll, daß immer $ds \geq 0$ bleibt:

$$\varepsilon \cdot ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - (cdt)^2 \quad (\varepsilon \pm 1) \quad (1.6c)$$

Im zeitartigen Bereich ist $\varepsilon = -1$, im raumartigen ist $\varepsilon = +1$.

Die physikalische Interpretation der Weltlinie \overline{AB} unserer Abb. 1.9 sagt aus, daß ein Objekt in der Zeitspanne $(c\Delta t)/c$ die Strecke Δx mit der Geschwindigkeit

$$v = c \cdot \frac{\Delta x}{c \Delta t}$$

zurücklegt. Betrachten wir das mitbewegte System \bar{S} , in dem das Objekt ruht, so muß die $c\bar{t}$ -Achse parallel zu der Weltlinie \overline{AB} orientiert sein, wie es die Abb. 1.9 zeigt. Die \bar{x} -Achse ist entsprechend der Konvention so ausgerichtet, daß die Weltlinie des Lichtes die Winkelhalbierende der Koordinatenachsen von \bar{S} bildet. Die (invariante) Weltlinie \overline{AB} schneidet auf der $c\bar{t}$ -Achse die Länge $c\Delta\bar{t}$ aus, während ihre Projektion auf die \bar{x} -Achse null ist (das Objekt ruht in \bar{S}), d.h. $\Delta\bar{x} = 0$. Das heißt aber, daß die raum-zeitliche Entfernung zweier Events ein Maß für die Eigenzeit des in S bewegten Objektes ist – die Zeit ΔT_E , die im System \bar{S} zwischen den Ereignissen A und B vergeht. Betrachten wir wieder nur die x,ct-Ebene und berücksichtigen, daß die Weltlinie zwischen den Ereignissen A und B in der Abb. 1.9 zeitartig ist, so können wir für die Eigenzeit ΔT_E schreiben

$$\Delta T_E = \frac{1}{c} \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.7a)$$

wenn wir $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ setzen. Für infinitesimale Abstände dT_E und dx können wir für (1.7a) schreiben

$$dT_E = d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (1.7b)$$

Bewegt sich ein Objekt mit Lichtgeschwindigkeit, z.B. ein Photon, so ist wegen (1.7a)

$$\Delta T_E = 0 \quad (1.7c)$$

Für Lichtsignale steht die Eigenzeit still.

1.4 Geometrie der Raumzeit

Im Folgenden wollen wir näher auf die geometrischen Eigenschaften der vierdimensionalen Raumzeit der Speziellen Relativitätstheorie eingehen (häufig Minkowski-Welt genannt). Wir können an diesem Beispiel auch die Gelegenheit nutzen, um allgemein übliche Schreibweisen für Koordinate, Vektoren u.ä.

einzuführen, um mit der Fachliteratur der Relativitätstheorie konform zu gehen und lehnen uns dabei eng an die in [53] genutzte Notation an. Der schon im letzten Kapitel kurz eingeführte Begriff des Vektors wird genauer beleuchtet, es wird darüber hinaus erläutert, was es mit der Minkowski-Welt auf sich hat und schließlich der Begriff der Metrik wird eingeführt.

Ein Vektor ist im Gegensatz zu einem Skalar, dessen Wert reelle Zahlen sind, wie z.B. Temperatur, Masse o.ä., eine Größe, zu deren Bestimmung sowohl eine Maßzahl als auch eine Richtung erforderlich ist und der durch einen Pfeil dargestellt wird mit der durch die Maßzahl festgelegten Länge. In dem Raum-Zeit-Diagramm der Abb. 1.9 z.B. ist die Verbindung \vec{OA} des Koordinatenursprungs zum Ereignis A der „Ortsvektor“ dieses Ereignisses; oder anders ausgedrückt, der Vektor \vec{AB} zeigt vom Ereignis A zum Ereignis B . Betrachten wir zur exakteren Definition für einen Vektor die Abb. 1.10, in der das Koordinatensystem sowohl für das Inertialsystem S als auch für \bar{S} eingezeichnet ist. Da ein Vektor im Raum-Zeit-Diagramm immer von einem Ereignis auf ein anderes zeigt – in unserem Beispiel von O nach E –, ist seine Schreibweise $\Delta\vec{o}$ und seine Definition in dem zweidimensionalen x,ct -Diagramm von S :

$$\Delta\vec{o} \rightarrow_S \{c\Delta t, \Delta x\}$$

analog gilt für das System \bar{S}

$$\Delta\vec{o} \rightarrow_{\bar{S}} \{c\Delta\bar{t}, \Delta\bar{x}\}.$$

Anhand der obigen Definition wird deutlich, daß sich bei dem Übergang vom Inertialsystem S auf \bar{S} der Vektor selbst nicht ändert; was sich ändert sind alleine die Komponenten des Vektors. Am Beispiel der Abb. 1.10 läßt sich das zeigen. Im Koordinatensystem S hat der Vektor $\Delta\vec{o}$ die Komponenten

$$\Delta\vec{o} \rightarrow_S \{c\Delta t = 1, 3, \Delta x = 1, 0\}$$

im System \bar{S} dagegen gilt

$$\Delta\vec{o} \rightarrow_{\bar{S}} \{c\bar{t} = 0, 9, \Delta\bar{x} = 0, 25\}.$$

Dies ist eine wichtige Tatsache: beim Übergang von S auf \bar{S} bleibt der Vektor der gleiche – er ist invariant –, nur seine Komponenten ändern sich; in unserem Fall entsprechend der Lorentz-Transformation.

Berücksichtigt man alle Koordinaten der vierdimensionalen Raumzeit der Speziellen Relativitätstheorie, so schreibt sich der Vektor $\Delta\vec{o}$ als Erweiterung dann entsprechend der obigen Definition:

$$\Delta\vec{o} \rightarrow_S \{c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\} \quad (1.8a)$$

Heute nutzt man allgemein für die Komponenten des Vektors $\{ct, x, y, z\}$ die Schreibweise $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$; die hochgestellten Indizes bedeuten nicht Exponenten der Komponenten, sondern geben nur deren Reihenfolge an; x^0 ist

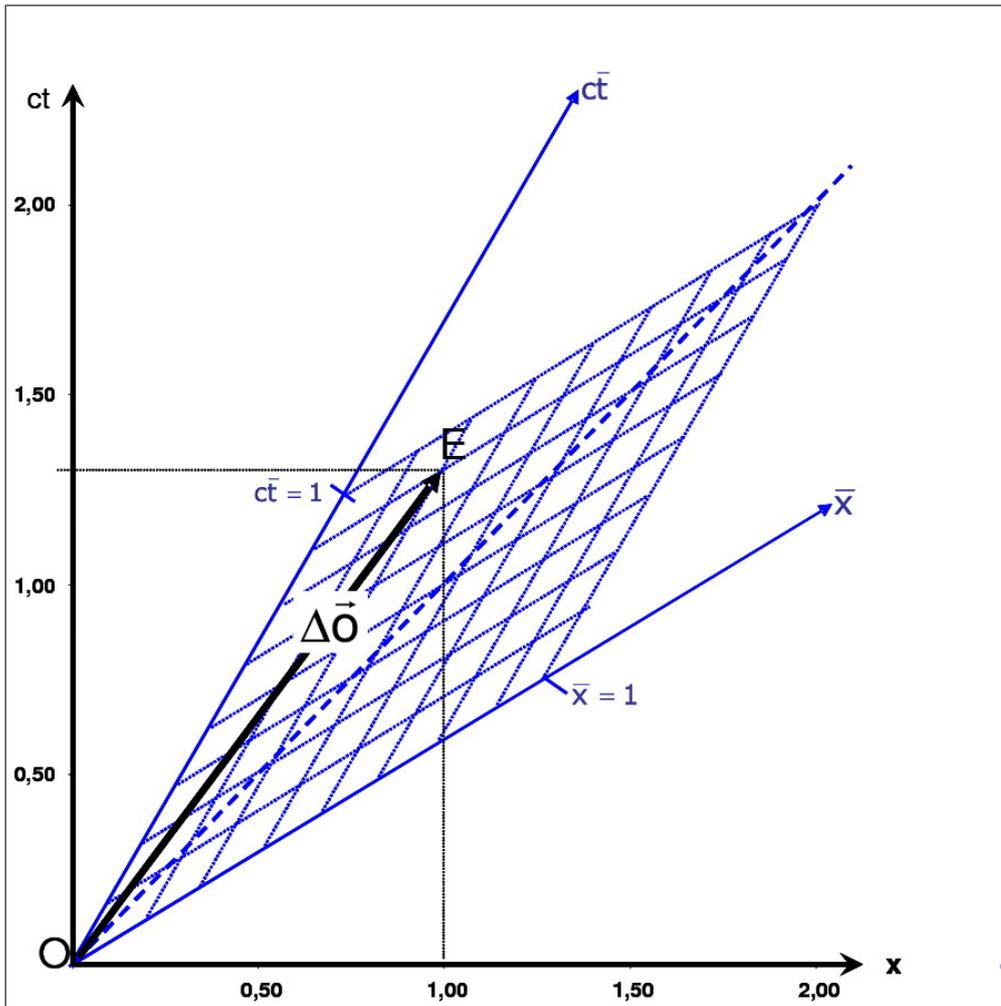


Abbildung 1.10: Vektor $\Delta\vec{o}$ im Raum-Zeit-Diagramm; Erläuterung im Text

die Zeitkomponente³, x^1, \dots, x^3 sind die Raumkomponenten. Der Vektor $\Delta\vec{o}$ schreibt sich dann damit

$$\Delta\vec{o} \rightarrow_s \{\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3\} \quad (1.8b)$$

Man hat noch eine weitere vereinfachte Schreibweise für Vektoren eingeführt: für unser Beispiel $\Delta\vec{o}$ heißt das z.B.:

$$\Delta\vec{o} \rightarrow_s \{\Delta x^\alpha\} \quad (1.8c)$$

und entsprechend schreibt sich der Vektor $\Delta\vec{o}$ im System \bar{S}

$$\Delta\vec{o} \rightarrow_{\bar{s}} \{\Delta x^{\bar{\alpha}}\} \quad (1.8d)$$

Mit $\{\Delta x^\alpha\}$ sind alle Komponenten $\{\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3\}$ gemeint; analog für $\{x^{\bar{\alpha}}\}$. Generell gilt, taucht ein griechischer Buchstabe alleine als Index auf, sei

³In den Arbeiten von EINSTEIN [15] und [10] sowie in der älteren Literatur wird vorwiegend für die Zeitkomponente x^4 genutzt und die Indizes von 1 bis 4 gezählt.

er hoch- sei er tiefgestellt, so sind (in der Relativitätstheorie) immer alle vier Komponenten gemeint. Tauchen lateinische Buchstaben als Indizes alleine auf, z.B. i, j, k , so sind die drei Raumkomponenten gemeint.

Vierervektoren sind in der Speziellen Relativitätstheorie spezielle Vektoren, deren Komponenten sich entsprechend der Lorentz-Transformation transformieren, genau wie in unserem obigen Beispiel der Vektor $\Delta\vec{o}$. Die Vierergeschwindigkeit oder die Viererbeschleunigung sind Beispiele solcher Vektoren (zu Details siehe z.B. [20] oder [53]). Für die Schreibweise von Vierervektoren nutzt man Großbuchstaben; so sei \vec{A} ein solcher mit seinen Komponenten:

$$\vec{A} = \{A^0, A^1, A^2, A^3\} = \{A^\alpha\} \quad (1.9a)$$

Den Betrag solch eines Vierervektors definieren wir in Analogie zu der Größe $(\Delta s)^2$ der Gleichung (1.6a) als

$$\vec{A}^2 = -(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 \quad (1.9b)$$

Da sich die Komponenten von \vec{A} entsprechend der Lorentz-Transformation wie die $\{c\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ transformieren, ist sicher gestellt, daß

$$-(A^0)^2 + (A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2 = -(A^{\bar{0}})^2 + (A^{\bar{1}})^2 + (A^{\bar{2}})^2 + (A^{\bar{3}})^2$$

ist. Die Größe ist unabhängig vom Koordinatensystem, d.h. sie ist skalar und invariant unter der Lorentz-Transformation.

HERMANN MINKOWSKI war der erste, dem die Analogie zwischen der Geometrie der Raumzeit und der Euklidischen Geometrie auffiel [40]. Betrachtet man ein kartesisches Koordinatensystem K mit den Koordinaten x und y , so ist der Betrag eines Vektors gegeben durch

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

Diese Größe ist invariant gegenüber einer Drehung des Koordinatensystems um einen bestimmten Winkel. Das gilt auch im vierdimensionalen Euklidischen Raum

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta w)^2$$

Ersetzt man in (1.6a) die zeitliche Komponente $-(c\Delta t)^2$ durch $(\Delta w)^2$, so hat die Gleichung für die raum-zeitliche Entfernung $(\Delta s)^2$

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 + (\Delta w)^2$$

die gleiche Form wie die Gleichung für eine Entfernung im vierdimensionalen Euklidischen Raum. Genauer muß man aber sagen, die Geometrie ist eine pseudo-Euklidische, denn in der x, ct -Ebene z.B. stehen die beiden Achsen nicht im Euklidischen Sinne aufeinander senkrecht, sondern im Sinne der pseudo-Euklidischen Geometrie. Der Begriff „Entfernung“ ist demnach auch nur im übertragenen Sinn zu verstehen. Mit diesem Ansatz hat MINKOWSKI den Weg gezeigt, wie man die (damals schon) vorhandenen und bewährten Verfahren der Vektoralgebra (und der Differentialgeometrie) in der Speziellen Relativitätstheorie vorteilhaft nutzen kann. Für die vierdimensionale Raumzeit der Speziellen Relativitätstheorie hat sich daher der Begriff „Minkowski-Welt“ eingebürgert.

Die Metrik. Greifen wir das schon erwähnte Beispiel für den Betrag eines Vektors auf und vergleichen den Euklidischen Fall mit dem des relativistischen Vierervektors, um den Unterschied zu verdeutlichen. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf zwei Dimensionen. Für den Euklidischen Fall gilt der bekannte „Pythagoras“ für den Betrag des Vektors \vec{V} mit seinen Komponenten $\{x, y\}$:

$$\vec{V}^2 = x^2 + y^2. \quad (1.10a)$$

Im Falle des relativistischen Vierervektors ist der Betrag des Vektors (in der x,ct-Ebene) \vec{A} mit den Komponenten $\{A^0, A^1\}$:

$$\vec{A}^2 = -(A^0)^2 + (A^1)^2. \quad (1.10b)$$

Beide obige Formeln, so unterschiedlich sie durch das negative Vorzeichen auch scheinen, sind beide eine sog. „quadratische Form“ [7], die für einen beliebigen Vektor $\vec{a} = \{a^1, a^2\}$ geschrieben werden kann:

$$\vec{a}^2 = g_{11} \cdot (a^1)^2 + 2 g_{12} \cdot a^1 \cdot a^2 + g_{22} \cdot (a^2)^2.$$

Mathematisch Vorgebildete werden sofort erkennen, daß die rechte Seite obiger Gleichung auch in Matrixform geschrieben werden kann:

$$\vec{a}^2 = \begin{pmatrix} a^1 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \vec{a}^T \mathbf{g} \vec{a}. \quad (1.11)$$

Hierbei wird auch deutlich, warum es „quadratische Form“ heißt. Die Matrix \mathbf{g} ist eine symmetrische zwei mal zwei Matrix und wird als metrischer Tensor bezeichnet; der Grund dafür wird uns gleich deutlich werden.

Hier soll die Gelegenheit genutzt werden, um noch eine weitere vereinfachte Schreibweise einzuführen. Für obige Formel der quadratischen Form (1.11) kann man auch schreiben:

$$\vec{a}^T \mathbf{g} \vec{a} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} a^i a^j$$

Dabei muß man wieder berücksichtigen, daß a^i nicht die i-te Potenz von a ist, sondern die i-te Komponente des Vektors \vec{a} bedeutet. EINSTEIN führte dazu die *Summenkonvention* ein in der Form (vielleicht war er es leid, immer wieder das Summensymbol schreiben zu müssen):

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} a^i a^j = g_{ij} a^i a^j.$$

Verbal kann man also die EINSTEINSche Summenkonvention folgendermaßen formulieren:

Immer, wenn ein Ausdruck einen Index sowohl hochgestellt als auch tiefgestellt enthält, wird über alle Werte summiert, die er annehmen kann.

Kommen wir nach diesem Ausflug wieder zurück zu den Formeln für den Betrag eines Vektors in den beiden Koordinatensystemen, dem kartesischen und dem Raum-Zeit-System. Aus den beiden Formeln (1.10a) und (1.10b) ersehen wir, daß die Matrix \mathbf{g} in beiden Fällen unterschiedlich ist:

$$\begin{aligned} \text{Euklidische Geometrie} & : \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Raum - Zeit - Geometrie} & : \mathbf{g} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Die Elemente g_{ij} der Matrix \mathbf{g} hängen demnach von der Art der Geometrie ab, für die sie gebildet werden. Betrachten wir noch ein verallgemeinertes Beispiel eines schiefwinkligen Koordinatensystems in Anlehnung an [6]. In der Abb. 1.11 ist ein Vektor in einem Teilausschnitt dieses Koordinatensystems dargestellt. Die Achsen schließen den Winkel δ ein. Der Vektor \overrightarrow{AB} habe die Länge $\sqrt{(\Delta s)^2}$. Um diese Länge zu bestimmen, können wir den Satz des PYTHAGORAS für das schiefwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ anwenden [7]. Die Strecke \overline{AC} entspricht Δx und \overline{CB} entspricht Δy . Die Anwendung des Pythagoräischen Satzes ergibt für den Betrag $(\Delta s)^2$ des Vektors \overrightarrow{AB} :

$$\begin{aligned} (\Delta s)^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - 2\Delta x \Delta y \cos(180^\circ - \delta) \\ &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + 2\Delta x \Delta y \cos \delta \end{aligned}$$

In diesem Fall des schiefwinkligen Koordinatensystems haben alle Elemente $\{g_{ij}\}$ der Matrix \mathbf{g} von Null verschiedene Werte

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & \cos \delta \\ \cos \delta & 1 \end{pmatrix}$$

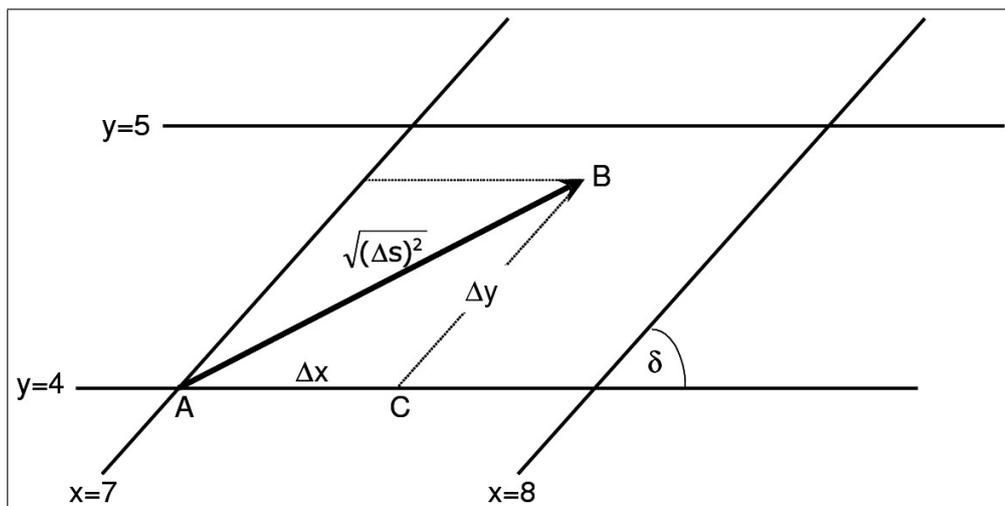


Abbildung 1.11: Ein Vektor im schiefwinkligen Koordinatensystem; Erläuterung im Text

Das bisher Gesagte gilt nicht nur im zweidimensionalen Fall, sondern für beliebige Dimensionen, so daß wir, wenn wir unsere oben eingeführten Notationen anwenden, für (das Quadrat der) infinitesimalen Entfernung schreiben können:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.13)$$

und im Falle der Speziellen Relativitätstheorie erhalten wir damit entsprechend (1.6b) für die raumzeitliche Entfernung:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{mit} \quad \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Der Mathematiker BERNHARD RIEMANN (1826–1866) hatte erkannt, daß die $g_{\mu\nu}$ der Matrix \mathbf{g} aus (1.13) nicht nur durch die Geometrie des Koordinatensystems bestimmt werden, sondern daß umgekehrt diese Größen auch eindeutig eine Geometrie definieren. Das ist der Grund dafür, daß die Entfernung ds aus der Formel (1.13) als *Metrik* und $g_{\mu\nu}$ als *metrischer Tensor* bezeichnet wird.

Bisher haben wir Koordinatensysteme mit Euklidischer oder im Falle MINKOWSKIS Raumzeit solche mit pseudo-Euklidischer Geometrie betrachtet. Ihnen ist gemeinsam, daß alle Elemente der Matrix (des metrischen Tensors) \mathbf{g} konstant sind; sie beschreiben einen *flachen Raum*. Das bedeutet, daß zwei Geraden, die am Anfang parallel sind, in diesen Räumen immer parallel bleiben. Es gilt also in ihnen EUKLIDS Parallelenaxiom. In diesem Sinne ist auch die MINKOWSKIS Raumzeit flach, denn es gilt in ihr das EUKLIDSche Axiom, aber sie ist nicht Euklidisch, denn sie hat eine andere Metrik und das Licht bewegt sich hier auf geraden Weltlinien mit der raum-zeitlichen Entfernung $ds^2 = 0$. RIEMANN ging aber noch einen Schritt weiter. Er untersuchte Geometrien, in denen die Elemente der Matrix \mathbf{g} nicht konstant sind, sondern selbst von den Koordinaten abhängen. Jeder Punkt des Raumes hat hier eine unterschiedliche Metrik, es ist eine Geometrie gekrümmter Räume und die Mathematik, die diese Geometrie beschreibt, ist die Differentialgeometrie. Im Folgenden werden wir sehen, daß sie zur mathematischen Basis der Allgemeinen Relativitätstheorie wurde.

1.5 Grenzen der Speziellen Relativitätstheorie

Mit der Speziellen Relativitätstheorie konnte EINSTEIN zeigen, daß die Gesetze der Physik in allen relativ zueinander gleichförmig bewegten Systemen – den Inertialsystemen – vollkommen identisch sind. Das gilt nicht nur für die Gesetze der Mechanik, sondern für alle Erscheinungen, auch für die elektromagnetischen. Mißt man in solchen Systemen Zeiten und Längen entsprechend der Vorschrift, die EINSTEIN selbst in seiner bahnbrechenden Arbeit 1905 [15] gegeben hat, dann stellt man fest, daß sich in jedem System ein anderes Maß ergibt, aber diese unterschiedlichen Resultate sind durch die Lorentz-Transformation ineinander überführbar.

Mit dieser Theorie hatte EINSTEIN den NEWTONSchen Ideen des absoluten Raumes und der absoluten Zeit ein Ende gesetzt. Es gilt nicht mehr die absolute Gleichzeitigkeit, sondern nur eine relative und die Lichtgeschwindigkeit ist eine absolute Grenzgeschwindigkeit, die höchste Geschwindigkeit, mit der kausale Wirkungen übertragen werden können.

Bewegt sich aber ein System beschleunigt gegenüber einem Inertialsystem, so ist es gegenüber dem Inertialsystem nicht gleichwertig. Naturgesetze, auf solche beschleunigten Systeme bezogen, lauten anders. In der Mechanik treten Scheinkräfte auf – z.B. Zentrifugalkräfte, Corioliskräfte –, analoge Wirkungen ergeben sich in der Elektrodynamik. EINSTEIN war sich dieser Einschränkung schon gleich nach Abschluß seiner Arbeit über die Spezielle Relativitätstheorie bewußt. Er hat später rückblickend selbst bemerkt (siehe [14] S. 150):

Als 1905 mit der Speziellen Relativitätstheorie die Gleichwertigkeit aller sogenannter Inertialsysteme für die Formulierung der Naturgesetze erlangt war, wirkte die Frage mehr als naheliegend, ob es wohl nicht eine weitergehende Gleichwertigkeit der Koordinatensysteme gäbe? Anders ausgedrückt: Wenn dem Begriff der Geschwindigkeit nur ein relativer Sinn zugeschrieben werden kann, soll man trotzdem daran festhalten, die Beschleunigung als absoluten Begriff festzuhalten?

Vom rein kinematischen Standpunkt aus war ja die Relativität beliebiger Bewegungen nicht zu bezweifeln; aber physikalisch schien dem Inertialsystem eine bevorzugte Bedeutung zuzukommen, welche die Bedeutung anders bewegter Koordinatensysteme als künstlich erscheinen ließ.

Für NEWTON war der absolute Raum die Ursache der Scheinkräfte, die sich bei beschleunigten Bewegungen bemerkbar machen, und da sie nicht gleichwertig zu den geradlinig, gleichförmigen Bewegungen sind, war die Spezielle Relativitätstheorie noch nicht vollständig. Das Relativitätsprinzip ist also dahingehend zu erweitern, daß *die Gesetze der Physik in beliebig bewegten Bezugssystemen in gleicher Weise gelten sollen.*

Um nun dieser Verallgemeinerung des Relativitätsprinzips näher zu kommen, versuchte EINSTEIN, das Gravitationsgesetz im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie zu beschreiben. Im NEWTONSchen Gravitationsgesetz ist die Anziehungskraft

$$K = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (1.15)$$

die zwei Körper aufeinander ausüben, nur von den Massen, ihrem Abstand r voneinander und der Gravitationskonstanten G abhängig. Ändert sich z.B. der Abstand r der beiden Massen, so ändert sich auch unvermittelt die Kraft zwischen den beiden Massen. Ein anschauliches Beispiel dazu bringt BRIAN GREEN in [22]. Angenommen, die Sonne würde urplötzlich explodieren, so würden wir auf der Erde – 150 Millionen Kilometer von der Sonne entfernt – nach der klassischen Theorie sofort die Abweichung von unserer Bahn um die

Sonne bemerken. Das Licht der Explosion würde uns aber erst ca. acht Minuten später erreichen. EINSTEIN war der Überzeugung, daß solch eine „instantane“ Fernwirkung nicht vereinbar ist mit der in der Speziellen Relativitätstheorie postulierten relativen Gleichzeitigkeit und der Tatsache, daß keine Wirkung sich schneller fortpflanzen kann als das Licht. Eigentlich eine zu der Zeit sehr gewagte Behauptung. Das Gravitationsgesetz war vielfach experimentell abgesichert und seine Theorie wurde erst ca. 40 Jahre später physikalisch bestätigt.

Der Versuch, das Gravitationsgesetz mit seiner Speziellen Relativitätstheorie zu vereinen, beschäftigte ihn mehrere Jahre, bis er schließlich erkennen mußte, daß seine Lösungen mit dem *Satz über die Gleichheit von schwerer und träger Masse* nicht vereinbar waren, ein Satz, der damals schon durch die Versuche von LORÁND EÖTVÖS (1848–1919) experimentell abgesichert war. Diese Unvereinbarkeit hat EINSTEIN durch ein genial einfaches Gedankenexperiment demonstriert (siehe [48] S. 204). Man stelle sich einen fallenden Stein und eine gleichzeitig in horizontaler Richtung abgeschossene Kugel vor; die Kugel wird aus gleicher Höhe und von gleicher Stelle aus abgeschossen, von der aus der Stein fällt. Nach klassischer Mechanik schlagen sie gleichzeitig am Boden auf. Betrachtet man aber den Vorgang von einem System \bar{S} aus, das sich mit der Geschwindigkeit der Kugel in horizontaler Richtung bewegt, kehren sich die Rollen von Stein und Kugel um. In \bar{S} fällt die Kugel senkrecht nach unten, während der Stein wie abgeschossen in entgegengesetzte Richtung fortfliegt. Nach klassischer Mechanik müssen beide hier wieder gleichzeitig auf dem Boden aufschlagen. Nach der Speziellen Relativitätstheorie aber können, wegen der relativen Gleichzeitigkeit gegeneinander bewegter Systeme, Kugel und Stein nur in einem Bezugssystem gleichzeitig auf dem Boden auftreffen, nicht aber in beiden.

Dieses Scheitern aber war der Ausgangspunkt für die Lösung des Problems; nach seinen eigenen Worten (in [14] S. 152):

Der Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse konnte nun sehr anschaulich so formuliert werden: In einem homogenen Gravitationsfeld gehen alle Bewegungen so vor sich wie bei Abwesenheit eines Gravitationsfeldes in bezug auf ein gleichförmig beschleunigtes Koordinatensystem. Galt dieser Satz für beliebige Vorgänge („Äquivalenzprinzip“), so war dies ein Hinweis darauf, daß das Relativitätsprinzip auf ungleichförmig bewegte Koordinatensysteme erweitert werden mußte, wenn man zu einer ungezwungenen Theorie des Gravitationsfeldes gelangen wollte.

Kapitel 2

Allgemeine Relativitätstheorie

Der Gedanke, der in dem im letzten Kapitel angeführten Zitat zum Ausdruck kommt, nannte EINSTEIN später einmal seinen „schönsten Gedanken“. Er brachte ihn auf den Weg zur Lösung seines Problems, eine Theorie aufzustellen, in der Gleichungen ihre Form behielten, wenn zwischen Bezugssystemen transformiert wird, die sich mit beliebiger Geschwindigkeit gegeneinander bewegen. Es müßte eine Erweiterung der Speziellen Relativitätstheorie sein und außerdem auch eine physikalische Erklärung für die Gravitation liefern. Seit NEWTON arbeitete man zwar sehr erfolgreich mit seinem Gesetz, das in der Anziehungskraft nach der Formel (1.15) zum Ausdruck kommt. Der wahre Charakter der Gravitation blieb aber verborgen, was BRIAN GREEN in [22] sehr anschaulich ausgedrückt, indem er meint, man nutzt das NEWTONSche Gesetz für die Anziehungskraft zwischen Körpern quasi nur wie eine Betriebsanleitung, ohne sich um das wahre Wesen der Gravitation zu kümmern. Auf der anderen Seite aber war es für EINSTEIN äußerst wichtig, daß seine zukünftige Theorie die so erfolgreiche NEWTONSche Theorie als Näherung enthält und nicht ad absurdum führt.

EINSTEIN war sich sicher, daß das „Äquivalenzprinzip“ der Schlüssel zu der gesuchten allgemeinen Theorie der Gravitation war. Aber der Weg bis zum ersehnten Ziel war noch weit; sieben Jahre – von 1908 bis 1915 – mühsamen Suchens, gepflastert mit zahlreichen Rückschlägen lagen vor ihm. 1915 hatte er sein Ziel erreicht und konnte seine Ergebnisse Ende des Jahres vor der Akademie der Wissenschaft in Berlin präsentieren; veröffentlicht wurden die Ergebnisse 1916 unter dem Titel „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“ in den Annalen der Physik [10]. Er selbst schreibt über seine Gefühle nach Abschluß der Arbeiten (in [14] S. 154):

Im Lichte bereits erlangter Erkenntnis erscheint das glücklich Erreichte fast wie selbstverständlich, und jeder intelligente Student erfaßt es ohne große Mühe. Aber das ahnungsvolle, Jahre währende Suchen im Dunkeln mit seiner gespannten Sehnsucht, seiner Abwechslung von Zuversicht und Ermattung und seinem endlichen

Durchbrechen der Wahrheit, das kennt nur der, wer es selber erlebt hat.

In den folgenden Kapiteln werden wir den Weg nachzeichnen, wie EINSTEIN von dem Äquivalenzprinzip zu seiner Allgemeinen Relativitätstheorie gekommen ist. Wir werden aber versuchen, mit möglichst wenig der höheren Mathematik auszukommen, die eigentlich dafür notwendig ist. Trotzdem werden wir die wichtigsten Formeln der Theorie zumindest zitieren, auch wenn wir sie im Detail nicht ableiten und erklären können

2.1 Das Äquivalenzprinzip

Bereits GALILEO GALILEI – er machte die Aussage „alle Körper fallen gleich schnell“ – und ISAAC NEWTON kannten die Erfahrungstatsache, daß Körper unterschiedlicher Beschaffenheit und Gewicht (im Vacuum) gleich schnell fallen. Die *träge* Masse m_t ist der „Proportionalitätsfaktor“ in dem zweiten NEWTONschen Gesetz

$$K_t = m_t \cdot b, \quad (2.1a)$$

das aussagt, daß die Beschleunigung b proportional zu der Kraft K ist, die auf die träge Masse m_t einwirkt; je größer die Masse m_t ist, umso mehr Kraft muß man aufwenden, um sie auf eine gleiche Beschleunigung zu bringen. Die *schwere* Masse m_s ist proportional zur Anziehungskraft, hervorgerufen durch die Gravitation, so daß z.B. für vertikale Bewegung eines Objekts im homogenen Gravitationsfeld auf der Erde gilt

$$m_t \cdot b = -m_t \frac{d^2 x}{dt^2} = -m_s \cdot g. \quad (2.1b)$$

Das ist die Bewegungsgleichung für den freien Fall eines Körpers im Schwerfeld der Erde mit der Schwerebeschleunigung g

$$x(t) = -\frac{1}{2} \frac{m_s}{m_t} g t^2 \quad (2.1c)$$

Wenn nun GALILEIS Aussage „alle Körper fallen gleich schnell“ richtig ist, dann muß das heißen, daß das Verhältnis m_s/m_t für alle Körper gleich ist. Wählt man in (2.1c) für beide Massen dann als Einheit [kg], kann man sie auch gleichsetzen.

NEWTON konnte durch Pendelversuche mit einer Genauigkeit von 10^{-3} zeigen, daß für unterschiedliche Körper sich die gleiche Schwingungsdauer dabei ergaben, d.h. daß $m_t = m_s$ ist. EÖTVÖS verfeinerte 1890 das Experiment wesentlich mit Hilfe einer Torsionswaage und mit einer noch verbesserten Version erreichte man 1922 eine Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-9}$. Mit Hilfe von Laserreflektoren schließlich, die bei der Apollo-Mission auf dem Mond installiert wurden, konnten Shapiro et.al. [57] die Gültigkeit des Äquivalenzprinzips auf 10^{-12} steigern. Seit GALILEI haben die Physiker die Tatsache der numerischen Gleichheit von träger und schwerer Masse zur Kenntnis genommen, aber sich keine tiefere Gedanken darüber gemacht, warum das so ist. Man hat überhaupt nicht

nach einer physikalischen Erklärung dafür gesucht; erst EINSTEIN, durch den gescheiterten Versuch, die Gravitation in die Spezielle Relativitätstheorie zu integrieren (siehe Kap. 1.5), wurde auf die Problematik aufmerksam.

Ein Punkt ist noch wesentlich zu erwähnen: die Gravitation als Kraft unterscheidet sich von allen uns heute bekannten anderen Kräften in einem bedeutenden Punkt – alle Körper werden im gleichen Maße von ihr beeinflusst, die Tatsache, die ja schon GALILEI konstatierte. Elektromagnetische Wechselwirkungen z.B. wirken auf geladene Körper und nicht auf neutrale und ihre Bewegung im Kraftfeld hängt vom Verhältnis Ladung zu Masse ab, das nicht für alle Körper gleich ist. Die anderen beiden Kräfte der Physik – die starke und schwache Wechselwirkung – beeinflussen unterschiedliche Partikel auf unterschiedliche Weise.

Die Gleichheit von schwerer und träger Masse bedeutet, daß entsprechend (2.1b) Trägheitskraft und Gravitationskraft äquivalent sind. Das heißt aber, daß man ein Schwerfeld durch eine Transformation auf ein beschleunigtes Bezugssystem eliminieren kann. Die Bewegungsgleichung eines Massepunktes im homogenen Schwerfeld der Erde ist nach NEWTON (wenn wir (2.1b) erweitern auf eine beliebige Richtung \vec{r}):

$$m_t \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m_s \vec{g}. \quad (2.2a)$$

Diese Bewegungsgleichung ist auf ein auf die Erdoberfläche bezogenes Bezugssystem S formuliert, das wir in guter Näherung als Inertialsystem betrachten können. Betrachten wir den gleichen Vorgang im Bezug auf ein beschleunigtes System \bar{S} mit der Transformationsgleichung

$$\vec{r} = \vec{\bar{r}} + \frac{1}{2} \vec{g} \bar{t}^2, \quad t = \bar{t}. \quad (2.2b)$$

Diese Transformation in (2.2a) eingesetzt ergibt als Bewegungsgleichung für den Massepunkt in dem beschleunigten Bezugssystem \bar{S}

$$m_t \frac{d^2 \vec{\bar{r}}}{d\bar{t}^2} = (m_s - m_t) \vec{g} = 0 \quad (2.2c)$$

Ist nun, wie ja experimentell mit hoher Genauigkeit bestätigt, *träge* und *schwere* Masse wertmäßig gleich, so bewegt sich das Teilchen in dem beschleunigten System \bar{S} kräftefrei. Das so definierte beschleunigte System ist nichts anderes als ein im homogenen Gravitationsfeld frei fallendes System, in dem die Gravitation aufgehoben ist. Es kann daher als (lokales) Inertialsystem angesehen werden. Relativ zu ihm kann aber auch umgekehrt das System S als ein beschleunigtes System angesehen werden. EINSTEIN hält nun die Auffassung, daß das System S in einem Schwerfeld ruhe, für gleichberechtigt zu der, daß \bar{S} ein System ist, in dem keine Gravitation herrscht. „Gleichberechtigt“ meint hier, daß im Gegensatz zu der Speziellen Relativitätstheorie hier beschleunigte Bezugsräume und geradlinig, gleichförmig bewegte keine unterschiedliche Betrachtung mehr erfordern. Diese Voraussetzung der vollen physikalischen

Gleichberechtigung nennt EINSTEIN das *Äquivalenzprinzip*: „... dieses wird offenbar durch den Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse nahegelegt und bedeutet die Ausdehnung des Relativitätsprinzips auf relativ zueinander ungleichförmig bewegte Koordinatensysteme. Durch diese Auffassung gelangt man zu einer Theorie, in welcher Trägheit und Schwere wesensgleich sind“ ([13] S. 60).

Um die Wesensgleichheit von Trägheit und Schwere zu veranschaulichen hatte EINSTEIN schon 1916 in seinem Büchlein „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie“ [12] ein anschauliches Gedankenexperiment beschrieben. Man denke sich im Weltall, sehr sehr weit entfernt von jeglichem Stern und sonstigen Massenansammlungen, einen Kasten, in dem ein Beobachter mit entsprechenden Apparaturen physikalische Experiment durchführen kann. Er befindet sich in einem vollkommen schwerefreien Zustand, vergleichbar den Astronauten in einer Erdumlaufbahn, die sich in ihrer Raumstation in einem im Schwerefeld der Erde „frei fallenden“ System aufhalten (Äquivalenzprinzip!). Außen, in der Mitte der Kastendecke befindet sich ein Haken, an dem ein Seil befestigt ist. Nun wird an dem Seil mit gleichmäßiger Kraft gezogen (in einem Gedankenexperiment müssen wir uns ja glücklicher Weise keinen Kopf darüber zerbrechen, wer oder was hier zieht). Der Kasten bewegt sich nun gleichförmig beschleunigt nach „oben“; die Kraft wird so einreguliert, daß die Beschleunigung gerade der Schwerebeschleunigung g entspreche. Die Geschwindigkeit des Kastens wird von einem Standpunkt im leeren Raum aus betrachtet immer größer werden.

Der Beobachter spürt nun durch die Beschleunigung des Kastens einen Druck des Bodens auf sich wirken, den er durch einen Gegendruck der Beine auffangen muß, um nicht der Länge nach hin zu fallen; er hat nun das Gefühl, sich in einem Raum auf der Erde zu bewegen, und gleichzeitig eine Vorstellung von „oben“ und „unten“. Ein in seiner Hand gehaltener Körper plötzlich losgelassen, unterliegt nicht mehr der Beschleunigung; der Boden des Kastens kommt vielmehr mit beschleunigter Bewegung auf ihn zu. Der Beobachter aber wird konstatieren, daß dieser Körper beschleunigt zu Boden „fällt“. Er wird auch feststellen, daß diese beschleunigte Bewegung immer die gleiche ist, was für einen Körper er auch nimmt. Er ist nun sicher, daß er sich mit seinem Kasten in einem konstanten Gravitationsfeld befindet. In dieser Annahme wird er noch bestärkt, wenn er an der Kastendecke eine Luke öffnet und den Haken und das Seil bemerkt; der Kasten scheint ruhend in in einem Schwerefeld aufgehängt. Obwohl vom freien Raum aus gesehen, sich der Kasten beschleunigt bewegt, kann doch der Beobachter in dem Kasten mit fug und recht sich als ruhend in einem Schwerefeld betrachten. Diese unterschiedliche Sichtweise beruht alleine auf der spezifischen Eigenschaft der Gravitation, unterschiedlichen Körpern die gleiche Beschleunigung zu erteilen; also auf der Gleichheit von träger und schwerer Masse. Es ist also demnach sinnvoll, das Relativitätsprinzip auf relativ zueinander beschleunigte Bezugssysteme auszudehnen und so auf eine verallgemeinerte Theorie zu kommen.

Der Experimentator in seinem Kasten hängt nun einen Körper an einem an der Kastendecke befestigten Seil auf. Für ihn ist es selbstverständlich, daß das Seil gespannt ist, denn er glaubt sich ja ruhend in einem Schwerfeld und die *schwere* Masse des Körpers sorgt für die Spannung. Ein im Außensystem ruhender Beobachter wird aber die Seilspannung so interpretieren, daß das Seil die Beschleunigung des Kastens mitmachen muß und sie auf den Körper überträgt. Dafür, daß das Seil gespannt bleibt, ist deshalb die *träge* Masse des Körpers verantwortlich. Dieses Gedankenexperiment zeigt, daß das „Gesetz von der Gleichheit von träger und schwerer Masse“ eine notwendige Bedingung für das verallgemeinerte Relativitätsprinzip ist. Stellt sich dann schließlich die Gültigkeit dieses verallgemeinerten Relativitätsprinzips – der Allgemeinen Relativitätstheorie –, durch Experimente bestätigt, heraus, ist eine physikalische Interpretation dieses Satzes gegeben.

Lassen wir unseren Beobachter in seinem Kasten ein weiteres Experiment durchführen. Er bringt an einer senkrechten Wand in einer bestimmten Höhe eine Lichtquelle an, die einen feinen Lichtstrahl senkrecht zur Wand abstrahlen kann. Auf der gegenüberliegenden Wand markiert er in exakt gleicher Höhe vom Boden die Stelle, wo der Lichtstrahl auftreffen sollte. Schaltet er den Lichtstrahl ein, so bemerkt er zu seiner Verblüffung, daß er nicht an der markierten Stelle, sondern etwas weiter „unten“ auftrifft¹. Auch wiederholte Versuche zeigen das gleiche Ergebnis. Für den außenstehenden Beobachter im leeren, kräftefreien Raum stellt sich dieses Experiment ganz anders dar. Nach wie vor bewegt sich der Lichtstrahl in seinem System (im Euklidischen Sinne) geradlinig, in der kurzen Zeit zwischen Aussenden des Lichtes und Ankunft auf der gegenüberliegenden Wand, hat sich der Kasten um ein kleines Stück nach „oben“ bewegt. Für den Beobachter in dem Kasten aber, der ja der Überzeugung ist, er befinde sich in Ruhe in einem Gravitationsfeld, ist klar, daß sich „Lichtstrahlen in einem Gravitationsfeld krummlinig fortpflanzen“.

Diese Erkenntnis war für EINSTEIN von außerordentlicher Bedeutung. Schon 1916 war ihm klar, daß der Nachweis der Lichtablenkung im Gravitationsfeld ein entscheidender Test – ein *experimentum crucis* – seines Äquivalenzprinzips und damit seiner neuen Theorie sein würde. Der Effekt ist in unserer normalen Umgebung unmerklich klein, aber Lichtstrahlen, die nahe am Sonnenrand vorbeigehen, sollten nachweisbar abgelenkt werden. Tatsächlich gelang es 1919 im Rahmen einer totalen Sonnenfinsternis den Effekt nachzuweisen; wir kommen später noch darauf zurück.

In dem Gedankenexperiment haben wir gezeigt, daß die Effekte, die in einem gegen ein Inertialsystem beschleunigt bewegtes System auftreten, äquivalent sind zu einem System, das in einem Gravitationsfeld ruht; heute wird dieses Prinzip das „schwache Äquivalenzprinzip“ genannt; *schwach*, weil es sich nur auf die Gravitation bezieht. Später werden wir auch noch das „starke Äquivalenzprinzip“ kennen lernen. Weiterhin haben wir weiter oben gesehen,

¹Wir nehmen natürlich an, daß er sehr feine Meßinstrumente hat, oder seine Geschwindigkeit schon entsprechend groß ist.

daß ein homogenes Schwerfeld mit einer entsprechenden Transformation entsprechend Gleichung (2.2b) eliminiert werden kann; das bedeutet aber nichts anderes als daß ein in einem Schwerfeld frei (beschleunigt) fallendes System kräftefrei und nach EINSTEINS Vorstellung ein Inertialsystem ist. In ihm ist die Spezielle Relativitätstheorie in der Minkowski-Welt gültig. Nun hat aber ein Inertialsystem, wie wir in Kap. 1.4 gesehen haben, eine pseudo-Euklidische Geometrie; sie ist flach und in Raum und Zeit unendlich ausgedehnt. Soll nun das frei fallende Bezugssystem ein Inertialsystem sein, so muß das Schwerfeld ganz bestimmte Eigenschaften aufweisen, die in der Realität nicht auftreten; es muß homogen in Raum und Zeit sein. In realistischen Gravitationsfeldern, wie z.B. dem der Erde, können wir nur von *lokalen Inertialsystemen* sprechen. Denken wir uns dazu, einem Beispiel aus [53] folgend, einen Kasten K , der im Schwerfeld der Erde entlang der Linie (Trajektorie) B frei fällt. In

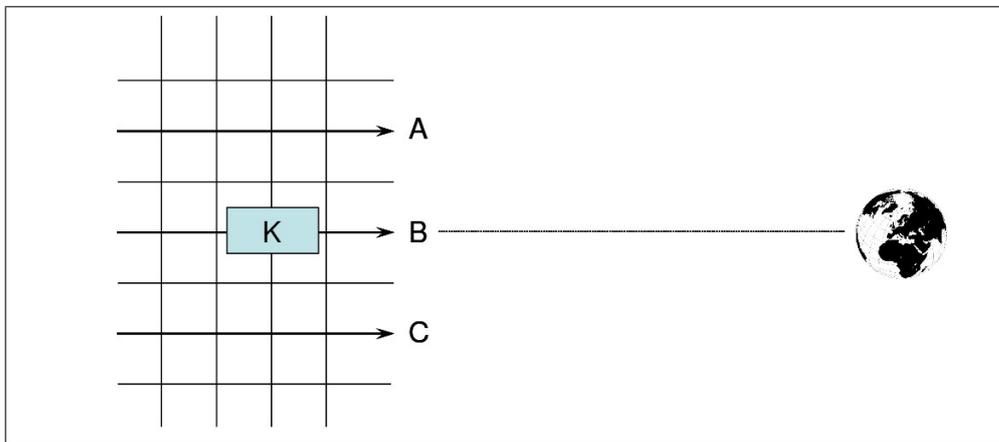


Abbildung 2.1: Ein gedachtes starres Gerüst, frei auf die Erde fallend, kann nicht starr bleiben (nach [53])

ihm herrscht nach dem Äquivalenzprinzip ein schwereloser Zustand wie in einem Inertialsystem. Entsprechend Abb. 2.1 gilt das aber nicht mehr für A und C , denn sie liegen nicht auf der Trajektorie B und unterliegen wegen des ungleichförmigen Gravitationsfeldes einer etwas anderen Schwerkraft. Ein in einem inhomogenen Gravitationsfeld frei fallendes Bezugssystem kann also nur in einem in Raum und Zeit begrenzten Gebiet *inertial* sein. Wie groß dieses Gebiet ist, hängt von der Inhomogenität des Feldes und der Meßgenauigkeit ab, wie genau nichtinertiale Effekte nachgewiesen werden können. Vom mathematischen Standpunkt aus kann nur ein infinitesimal kleines Gebiet als inertial betrachtet werden, da zumindest im Prinzip jede Inhomogenität feststellbar ist. Bei heutiger Technik aber kann ein nahe der Erdoberfläche frei fallendes Bezugssystem als Inertialsystem angesehen werden – das Gravitationsfeld ist praktisch homogen.

Jedes beliebige Schwerfeld läßt sich nach dem oben Gesagten innerhalb eines beliebig kleinen Raumgebietes und während einer hinreichend kurzen Zeitspanne als homogen ansehen. Deshalb ist es nach dem Äquivalenzprinzip

auch immer möglich, ein Bezugssystem zu finden, relativ zu dem in diesem Raum-Zeit-Gebiet kein Gravitationsfeld vorhanden ist. D.h. man kann das Gravitationsfeld analog wie in Gleichung (2.2b) „wegtransformieren“. Damit ist aber nicht gesagt, daß man grundsätzlich immer jedes Schwerefeld generell beseitigen kann, die Gravitation also als nur „scheinbar“ aufgefaßt werden kann. Das einfache Beispiel der Abb. 2.1 verdeutlicht das. Auf der anderen Seite kann man aber durchaus spezielle Gravitationsfelder konstruieren, die man vollständig durch eine entsprechende Transformation beseitigen kann. An dem oben besprochenen Kastenexperiment hatten wir solch einen Fall kennen gelernt. In seiner Arbeit zur Allgemeinen Relativitätstheorie [10] schreibt EINSTEIN dazu:

Aus diesen Erwägungen [gemeint ist das Äquivalenzprinzip] sieht man, daß die Durchführung der allgemeinen Relativitätstheorie zugleich zu einer Theorie der Gravitation führen muß; denn man kann ein Äquivalenzprinzip durch bloße Änderung des Koordinatensystems „erzeugen“.

2.2 Maßstäbe und Uhren in beschleunigten Bezugssystemen

Bisher haben wir nur eher qualitative Aspekte besprochen, die im Zusammenhang mit beschleunigt bewegten Bezugssystemen auftreten. Da die Physik aber vor allem eine quantitative Wissenschaft ist, müssen wir uns genauer mit den zeitlichen und räumlichen Verhältnissen beschäftigen. Für die Spezielle Relativitätstheorie hatte EINSTEIN ganz konkrete Handlungsanweisungen gegeben, wie Längen und Zeiten in den relativ zueinander (geradlinig und gleichförmig) bewegten Inertialsystemen zu messen sind (siehe dazu z.B. [15] oder [20]). Bewegt sich z.B. ein Inertialsystem \bar{S} mit gleichförmiger Geschwindigkeit v gegenüber einem ruhenden Inertialsystem S , so bestimmt die Lorentz-Transformation, welche Länge in S für einen Stab gemessen wird, der in dem bewegten System \bar{S} die Länge \bar{l} hat; das Ergebnis ist ein kleinerer Wert infolge der Lorentz-Kontraktion. Ähnliche Effekte treten auch bei der Messung der Zeit auf: in einem (gleichförmig) bewegten System gehen die Uhren im Vergleich zu dem ruhenden langsamer.

Mit der angestrebten Erweiterung der Relativitätstheorie auf beschleunigt bewegte Bezugssysteme und damit wegen des Äquivalenzprinzips auch auf Systeme unter dem Einfluß von Gravitationsfeldern, müssen Regeln gefunden werden, wie die räumlichen und zeitlichen Angaben in den unterschiedlichen Systemen zusammenhängen. Ein Beispiel für die Klärung dieser Frage hat EINSTEIN schon in seiner Originalarbeit zur Allgemeinen Relativitätstheorie [10] gegeben: Stellen wir uns in einem Raum der frei von Gravitationsfeldern ist, ein ruhendes Inertialsystem $S(x, y, z, t)$ vor – EINSTEIN nennt solche Bezugssysteme „Galileische Bezugssysteme“. Außerdem denken wir uns ein relativ zu S gleichförmig rotierendes System $\bar{S}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$. Die Ursprungspunkte beider Koordinatensysteme sowie deren z -Achsen fallen dauernd zusammen wie in

Abb. 2.2 dargestellt. Wir wissen, daß in dem System S die Euklidische Geometrie gilt; gilt das gleiche aber auch in \bar{S} , das ja nicht gleichförmig, sondern beschleunigt dazu bewegt ist? Wir denken uns in \bar{S} einen Kreis gezogen mit dem Radius R . Ferner stellen wir uns vor, wir hätten eine große Zahl starrer und untereinander gleich langer Stäbchen zum Messen zur Verfügung. Relativ in Ruhe zu \bar{S} legen wir Stäbchen entlang dem Umfang des Kreises und entlang des Radius aneinander. Als Ergebnis erhalten wir U als Zahl der Stäbchen entlang des Umfanges und R als Anzahl entlang des Radius. Wenn nun \bar{S} relativ zu S nicht rotiert, wird das Verhältnis von Umfang zu Radius in einigermaßen guter Näherung

$$\frac{U}{R} = 2\pi$$

sein. Wenn aber \bar{S} rotiert, dann wird es sich anders verhalten. Nehmen wir an, wir bestimmen zu einem bestimmten Zeitpunkt t von S aus die Länge der Stäbchen. Von S aus gemessen, erfahren die Stäbchen auf der Peripherie des Kreises entsprechend der Lorentz-Kontraktion eine Verkürzung – sie bewegen sich parallel zur Relativgeschwindigkeit. Die Stäbchen entlang des Radius er-

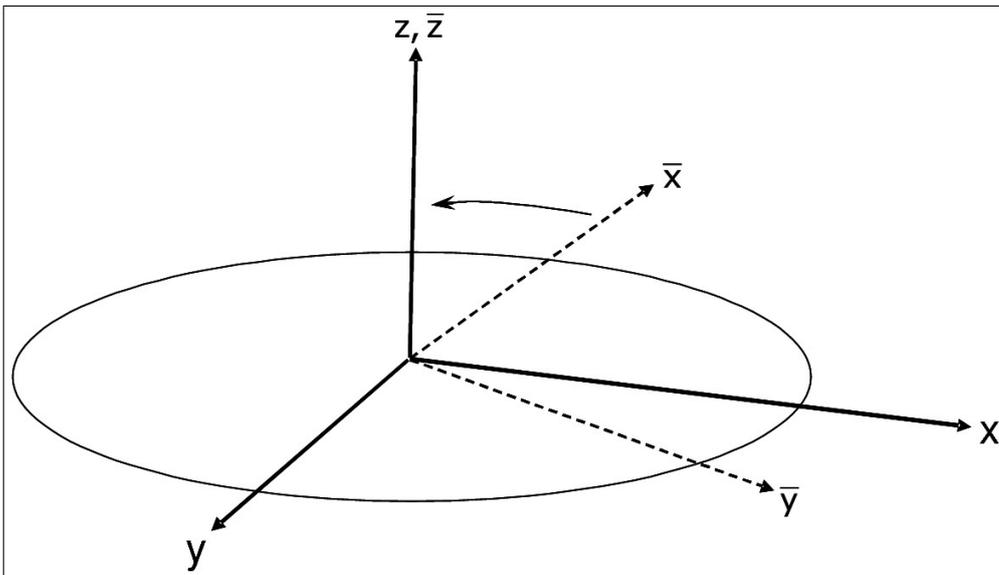


Abbildung 2.2: Eine Kreisscheibe in einem rotierenden System $\bar{S}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in der x, y -Ebene eines Inertialsystems $S(x, y, z)$

fahren dagegen keine Verkürzung, da sie senkrecht zur Relativgeschwindigkeit gemessen werden. Bilden wir nun in S aus der hier zur Messung erforderlichen Anzahl der Stäbchen wieder das gleiche Verhältnis, so stellen wir fest, daß

$$\frac{U}{R} > 2\pi$$

ist (wir müssen ja mehr Stäbchen anlegen). Das bedeutet aber, daß in dem beschleunigten (rotierenden) System \bar{S} nicht die Euklidische Geometrie gelten kann.

Ein analoges Experiment können wir auch zur Messung der Zeit durchführen. Bringen wir auf der Peripherie und im Mittelpunkt des Kreises je eine Uhr an. Beide sollen absolut gleich beschaffen sein und mit \bar{S} rotieren. Von S aus gemessen geht die Uhr entsprechend der Zeitdilatation an der Peripherie langsamer als im Zentrum. Das Gleiche wird aber auch von \bar{S} aus beobachtet werden, denn hier ruht das Zentrum, während die Peripherie sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegt, die auch noch umso größer je größer der Radius ist. Es läßt sich also in einem beschleunigten System \bar{S} weder Raum noch Zeit so definieren, wie es in der Speziellen Relativitätstheorie in Bezug auf Inertialsysteme möglich war. In ihr herrscht die pseudo-Euklidische Geometrie, dort aber muß eine andere gelten.

Nach dem Äquivalenzprinzip kann man nun aber \bar{S} auch als „ruhendes“ Bezugssystem in einem Gravitationsfeld betrachten (ein recht merkwürdiges Gravitationsfeld, ein Zentrifugalfeld, Feld der Coriolis-Kraft). EINSTEIN zieht daraus den Schluß: „Das Gravitationsfeld beeinflußt bzw. bestimmt die metrischen Gesetze des raumzeitlichen Kontinuums“ ([13] S. 63) und dessen Geometrie ist dann nicht Euklidisch. EINSTEINS entscheidender Schritt war nun, daß er die Ähnlichkeit zwischen den RIEMANNschen Räumen und der Physik der Gravitation erkannt hat. Aber bevor wir seinen Gedankengängen weiter folgen können, müssen wir einen Abstecher in die Geometrie gekrümmter Räume machen.

2.3 Geometrie gekrümmter Räume

EUKLID VON ALEXANDRIA (ca. 365 – ca. 300 v. Chr.) hatte auf Basis einer kleinen Anzahl von Grundannahmen – Axiomen – die nach ihm benannte Geometrie entwickelt. Diese Axiome waren Aussagen über Punkte, Geraden, Ebenen und ähnliche Dinge und sollten als absolut exakt gelten. Ausgehend von diesen Axiomen konnte er alle übrigen Sätze der Geometrie durch logisches Schließen ableiten. Das Vorgehen entsprechend der (Euklidische) Geometrie wurde zum Vorbild logischen Denkens; etwas „more geometrico“ abzuleiten, galt als Ziel für jede Beweisführung. Seit der Zeit EUKLIDS hat man die von ihm entwickelten Sätze für absolut richtig gehalten und KANT erklärte sie 1781 in seiner kritischen Philosophie schließlich als a priori richtig.

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) war einer der ersten in neuerer Zeit der das Euklidische Parallelen-Axiom nicht als denotwendig ansah², hat diese Gedanken aber aus Furcht vor dem Unverständnis seiner Kollegen nicht veröffentlicht³. Er beschäftigte sich aber als Geodät intensiv mit der

²Bereits im 12. Jahrhundert zweifelte der Persische Mathematiker, Astronom und Dichter OMAR KHAYYÁM (1048–1131) an der Richtigkeit des Parallelen-Axioms und entwickelte eine nicht-Euklidische Geometrie.

³JÁNOS BOLAY (1802–1860) war der erste, der eine nicht-Euklidische Geometrie in neuerer Zeit entwickelte und veröffentlichte; als GAUSS ihm nach der Lektüre aber schrieb, seine Ergebnisse seien zwar richtig, ihm aber schon längst bekannt, war er bis zu seinem Tod frustriert.

Geometrie gekrümmter Flächen; BERNHARD RIEMANN (1826–1866) erweiterte sie zur Geometrie nicht-Euklidischer Räume beliebiger Dimension und die Mathematiker ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL (1829–1900), GREGORIO RICCI-CURBASTRO (1853–1925) sowie sein Schüler TULLIO LEVI-CIVITA (1873–1941) entwickelten dafür die Differentialgeometrie und das Tensorkalkül. Diese konnte EINSTEIN schließlich nutzen, um seiner Allgemeinen Relativitätstheorie das mathematische Gerüst zu geben.

Zwei Begriffe, die eine wesentliche Rolle spielen werden, wollen wir hier anhand der Euklidischen Geometrie erläutern: die Gerade und die Parallele. In dieser Geometrie ist die kürzeste Verbindung zweier verschiedener Punkte P und Q eine Gerade. Das Parallelenaxiom von EUKLID besagt nun, daß zwei Geraden, die anfänglich parallel zueinander sind, auch parallel zueinander bleiben, wenn man sie beliebig verlängert. Was gemeint ist, ist, daß die Geraden ihre Richtung beibehalten, mit der sie gestartet sind. Geometrisch ausgedrückt bedeutet das, daß die Tangente (genauer gesagt: der Tangentenvektor) in einem beliebigen Punkt der Geraden parallel zu der Tangente des vorhergehenden Punktes bleibt und das auch in der Verlängerung der Geraden; das soll für beide Geraden gleichermaßen gelten. Die Gerade ist die einzige Kurve in der Euklidischen Geometrie, die ihren eigenen Tangentenvektor „parallel-transportiert“.

Wenn wir von Krümmung oder von gekrümmten Räumen sprechen, müssen wir zwei Arten unterscheiden: die *extrinsische* und die *intrinsische*. Extrinsisch bedeutet soviel wie von „außen kommend oder von außen betrachtet“, während intrinsisch „von innen kommend oder inneliegend“ bedeutet. Der Unterschied wird deutlich, wenn wir einen Zylinder betrachten. Für uns, als in einer dreidimensionalen Welt lebende Wesen, erscheint die Zylinderfläche gekrümmt, eben als extrinsische Krümmung. Flächenwesen aber, die auf dem Flächenland⁴ der Zylinderoberfläche leben, erleben ihre Welt als eine Euklidische. Eine Zylinderoberfläche kann man sich nämlich als ein Blatt Papier vorstellen, das, ohne daß es gefaltet oder geknittert werden muß, zusammengerollt werden kann. Die Entfernungen zwischen zwei Punkten auf dem Blatt Papier bleiben die gleichen, wenn es als Zylinder aufgerollt ist, parallele Linien bleiben parallel, wenn sie verlängert werden und die Winkelsumme eines Dreiecks ist in beiden Fälle 180° . Bei einer Kugel ist das ganz anders. In unserer dreidimensionalen Welt erkennen wir die extrinsische Krümmung der Kugeloberfläche. Im Gegensatz zu der Zylinderoberfläche hat sie aber auch eine intrinsische Krümmung mit der Folge, daß das Parallelenaxiom nicht gilt, die Winkelsumme in Dreiecken größer als 180° oder das Verhältnis des Umfangs zu Radius eines Kreises $\leq 2\pi$ ist (für mathematisch interessierte Leser wird letztere Tatsache im Anhang B abgeleitet). Ein Flächenwesen auf einer Kugeloberfläche wird also in der Lage sein, durch Messungen festzustellen, daß seine zweidimensionale Welt (in der dreidimensionalen) gekrümmt ist, obwohl es davon keine direkte Erfahrung haben kann, genauso wenig wie wir in unserer dreidimensionalen Welt uns nicht

⁴Wie solche Flächenwesen aussehen, was sie in ihrer zweidimensionalen Welt erleben, kann man in dem sehr amüsanten Buch von E.A. Abbott [1] nachlesen.

vorstellen können, wie sie in einer vierdimensionalen gekrümmt sein könnte. Sollte solch eine Krümmung vorhanden sein, die Allgemeine Relativitätstheorie postuliert ja das, dann muß sie Meßvorschriften vorgeben, wie solch eine Krümmung des dreidimensionalen Raumes nachgewiesen werden kann.

Daß die Gültigkeit des Parallelenaxioms bis zur Zeit GAUSS´ s nicht in Zweifel gezogen wurde, ist eigentlich verwunderlich, wurden doch schon seit Jahrhunderten Karten gezeichnet und sogar Globen hergestellt. Die Autorität von EUKLID und KANT waren einfach zu groß. Als GAUSS ein terrestrisches Dreieck mit sehr großen Kantenlängen zwischen den Bergen Brocken, Hoher Hagen und Inselberg vermaß und innerhalb der Meßgenauigkeit keine Abweichung von der Winkelsumme von 180° nachweisen konnte, wurde er trotzdem von philosophischer Seite heftig angegriffen, wie er es wagen konnte, die Euklidische Geometrie in Zweifel zu ziehen. Auch wenn eine Abweichung gefunden worden wäre, so wäre das eher hervorgerufen durch eine Ablenkung des Lichtes durch irgend eine unbekannte Ursache als ein Hinweis auf die Ungültigkeit der EUKLIDischen Axiome. Kein Wunder, daß er sich nicht traute, seine Zweifel an der generellen Gültigkeit des Parallelenaxioms zu publizieren⁵.

Dabei ist die Tatsache, daß das Parallelenaxiom auf der Kugeloberfläche keine Gültigkeit hat, leicht einzusehen. Betrachten wir dazu die Abb. 2.3 und stellen uns vor, zwei Linien starten in den Punkten A und B senkrecht zum Äquator. Lokal sind beide gerade Linien, die parallel zueinander sind. Werden sie immer wieder genau in Richtung Nord verlängert, so folgen sie Großkreisen und treffen schließlich am Nordpol N zusammen. Dabei wird auch deutlich, daß die Winkelsumme im Dreieck größer als 180° ist, denn die beiden Winkel in dem Dreieck $\triangle ABN$ bei A und B machen alleine schon in der Summe 180° aus.

Von der dreidimensionalen Sicht her ist es nicht auf den ersten Blick einsichtig, warum sich die beiden, in den Punkten A und B senkrecht zum Äquator startenden Geraden, in der Verlängerung ausgerechnet am Pol N treffen sollten. Warum halten sie ihren Abstand nicht bei und gehen am Nordpol vorbei? Aus unserer, der dreidimensionalen Sicht halten die Breitengrade auf der Kugel in Abb. 2.3 ja auch den gleichen Abstand und sind dementsprechend „parallel“. Um dieses Mißverständnis aufzulösen, müssen wir uns in die flache Geometrie der Kugeloberfläche hineindenken. Bereits GAUSS hat sich diesem Thema gewidmet und in seiner „geometria intrinseca“ ausgiebig behandelt.

⁵Diese Geschichte wird u.a. von MAX BORN [6] und ALEXANDER FRIEDMANN [19] berichtet. Der Übersetzer aus dem Russischen von FRIEDMANNs Schrift – G. Singer – zeigt aber, daß das eine schöne Legende ist. In einer Anmerkung zu [19] stellt er das klar: „Die Ergebnisse der Auswertungen aller verfügbaren historischen Quellen sprechen dagegen, daß GAUSS die Vermessung des Dreiecks in der Absicht durchgeführt hat, dessen Winkelsumme zu bestimmen, um die Euklidische Struktur des physikalischen Raumes zu überprüfen. Vielmehr benutzte Gauß im Rahmen der von ihm durchgeführten Triangulation die Winkelsumme des Dreiecks gerne als Probe, um vermittels Abweichungen vom Sollwert 180° – die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie stillschweigend vorausgesetzt – Meßfehler ausfindig zu machen. Die Legende . . . entstand vermutlich aufgrund einer Fehlinterpretation in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts und fand weite Verbreitung in der Literatur.“

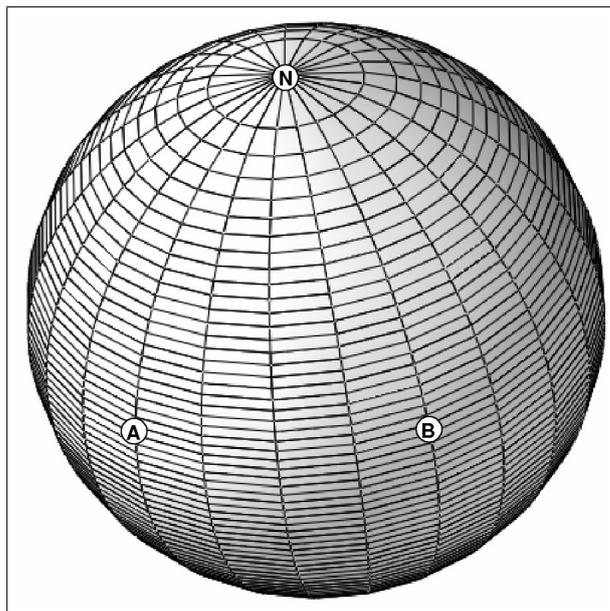


Abbildung 2.3: Zum Parallelenaxiom

Danach hat die Geometrie in einer Fläche nichts zu tun mit der Gestalt der Fläche, wie sie einem Betrachter erscheint, dem die dreidimensionale Sichtweise zur Verfügung steht. Versuchen wir das an unserem Beispiel zu verdeutlichen. Wir versetzen uns gedanklich in die Situation eines Flächenwesens, das auf der Kugeloberfläche lebt. Wenn (von der Warte dreidimensionaler Beobachter) die Kugel, auf der es lebt, sehr groß ist, wird es eine Krümmung seiner Welt nicht auf den ersten Blick bemerken, denn es läßt sich allgemein beweisen (siehe z.B. in [53] S. 158), daß in Räumen wie der Kugeloberfläche in der unmittelbaren Umgebung eines jeden Punktes die zweidimensionale ebene (Euklidische) Geometrie herrscht. Wir können uns dies (wieder aus der dreidimensionalen Sicht) als ebene Fläche vorstellen, die tangential beispielsweise in dem Punkt A an der Kugel anliegt. Die Verbindungslinie vom Punkt A zum Kugelmittelpunkt steht dann senkrecht auf der Tangentenfläche; Abb. 2.4 zeigt sie an dem Punkt A der Kugel. Wie groß die Umgebung ist, in der auf der Kugeloberfläche die Euklidische Geometrie gültig ist, hängt von der Größe des Radius der Kugel ab. Nehmen wir das Beispiel unserer Erde, so kann man die Fläche einer Stadt wie Frankfurt als eben betrachten und ihren Plan ohne Verzerrung aufzeichnen. Das Flächenwesen zeichnet nun, beginnend im Punkt A , eine Gerade. Wir erinnern hier an das, was wir weiter oben über Geraden gesagt haben, nämlich, daß sie immer ihre Richtung beibehalten, in der sie gestartet sind. Wenn die Gerade immer länger wird, kommt sie langsam an den Rand des Gültigkeitsbereiches der Euklidischen Geometrie; das Flächenwesen merkt natürlich nichts davon, in der Umgebung der Nachbarpunkte, die jetzt von der Geraden erreicht werden, gilt natürlich auch die ebene Geometrie, allerdings mit – aus dreidimensionaler Sicht – geneigter Tangentenfläche. Jetzt können wir aber auch die Sichtweise umdrehen: wir halten – wieder aus

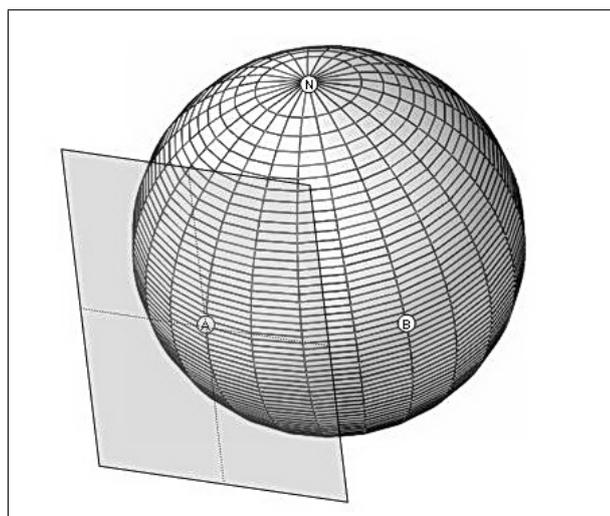


Abbildung 2.4: Tangentenfläche

der dreidimensionalen Sicht – die Tangentenfläche fest und die Gerade, die das Flächenwesen in seiner Welt streng nach Vorschrift zeichnet, wirkt aus der neuen Sichtweise wie das Abrollen der Kugel auf einer geraden Linie in der Tangentenfläche. Das bedeutet aber, daß die Kurve, die für das Flächenwesen eine Gerade bedeutet, auf der Kugeloberfläche ein Stück eines Großkreises ist. Dabei ist es vollkommen egal, in welche Richtung das Flächenwesen sich „geradeaus“ bewegt, es wird sich dabei immer auf einem Großkreis bewegen. Der Großkreis ist der größtmögliche Kreis auf einer Kugel und sein Mittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammen. Für das Flächenwesen ist die Gerade in seiner Welt die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten; aus Sicht der dritten Dimension ist demnach die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Kugeloberfläche ein Teil eines Großkreises, auch Orthodrome genannt. Deshalb führen Flug- oder Schiffsrouten immer möglichst entlang der Großkreise.

Es sei noch erwähnt, daß die Konstruktion des Koordinatensystems vollkommen beliebig ist; die einzige Forderung besteht darin, daß die Koordinatenlinien stetig gekrümmt sind und die Fläche einfach und lückenlos überdecken. In der Abb. 2.3 haben wir das uns geläufige Koordinatensystem der Längen- und Breitenkreise gewählt; für diese Wahl nehmen die Komponenten des metrischen Tensors $\{g_{ij}\}$ eine einfache Form an (siehe (A.2c) im Anhang A.1). Würde man ein anderes Koordinatensystem wählen, würden die $\{\bar{g}_{ij}\}$ anders, vielleicht auch viel komplizierter aussehen. Es lassen sich Transformationen entwickeln, die die $\{\bar{g}_{ij}\}$ in die $\{g_{ij}\}$ überführen und umgekehrt. Dabei bleiben wichtige Elemente der Fläche, wie der (kürzeste) Abstand zwischen zwei Punkten, die Geodäten o.ä. bei dieser Transformation unverändert, sie sind invariant. Die Flächengeometrie wird, wie es MAX BORN in [6] ausdrückt, zu einer Invariantentheorie sehr allgemeiner Art.

Ist der gekrümmte (zweidimensionale) Raum nicht eine Kugeloberfläche, sondern ein Rotationsellipsoid oder ein Gebilde mit birnenförmiger Gestalt, so lassen sich darin auch Kurven definieren, für die gilt, daß die Entfernung zwischen zwei Punkten in diesen (gekrümmten) Flächen minimal ist. Dieses läßt sich auch auf dreidimensionale Räume verallgemeinern, natürlich auch auf Räume beliebiger Dimension. In Euklidischen Räumen ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten die Gerade, analog lassen sich in gekrümmten Räumen kürzeste Verbindungen zwischen zwei Punkten definieren. Wir wollen uns im Weiteren im Hinblick auf das Thema Allgemeine Relativitätstheorie auf gekrümmte Räume mit bestimmten Eigenschaften beschränken, die Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Als Mannigfaltigkeit bezeichnet man allgemein in der Mathematik einen Raum der Dimension n , der lokal einem Euklidischen Raum der Dimension n gleicht. Für die Differentialgeometrie sind Mannigfaltigkeiten der zentrale Gegenstand. Für die *Riemannsche Mannigfaltigkeit* wird speziell gefordert, daß

- a) sie glatt ist, was mathematisch bedeutet, daß in jedem Punkt die erste und zweite Ableitung nach den Koordinaten existiert,
- b) sie besitzt eine Metrik, d.h. es existiert eine Beziehung entsprechend (1.13)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

wobei die Elemente der Matrix $\{g_{\mu\nu}(x)\}$ von den Koordinaten abhängen, und

- c) es existiert immer ein Koordinatensystem in dem für einen beliebigen Punkt gilt

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}; \quad \text{mit } \delta_{\mu\nu} = 1 \text{ wenn } \mu = \nu, \text{ sonst } 0.$$

Der Punkt c) ist der mathematische Ausdruck dafür, daß die Riemannsche Mannigfaltigkeit lokal einem Euklidischen Raum gleicht. Die Kugeloberfläche unseres obigen Beispiels ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension zwei, denn sie ist glatt, hat eine Metrik (siehe im Anhang A.1) und gleicht lokal einem Euklidischen Raum der Dimension zwei – einer ebenen Fläche (siehe Abb. 2.5 a). Gleichermäßen ist die Oberfläche eines Ellipsoids (Abb. 2.5 b) und eine Sattelfläche (Abb. 2.5 c) eine zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit.

In diesen RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten läßt sich nun ganz allgemein die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten – die *Geodäte* – definieren. Die Größe ds in der Beziehung für die Metrik ist ja nichts anderes als die infinitesimale Entfernung zweier Punkte in der Mannigfaltigkeit. Eine Kurve, die zwei Punkte A und B verbindet, kann man sich als Aneinanderreihung solcher kleiner Wegelemente ds vorstellen; als Formel ausgedrückt bedeutet das für die Länge l der Kurve:

$$l = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}.$$

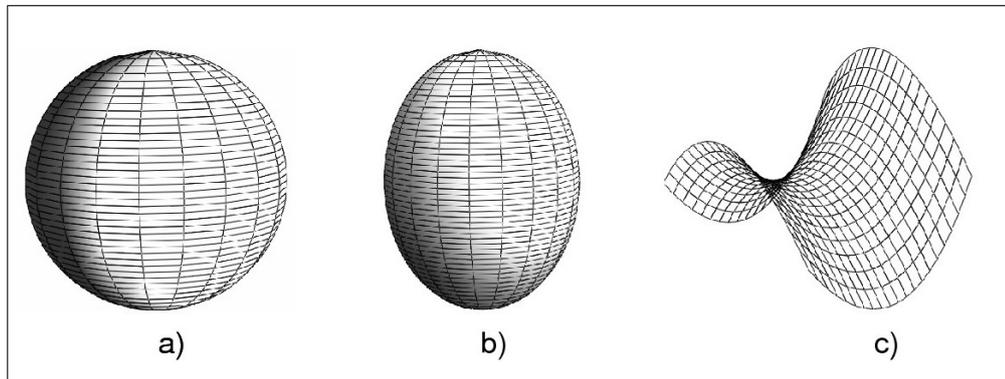


Abbildung 2.5: Beispiele zweidimensionaler Riemannscher Mannigfaltigkeiten

Die Geodäte ist nun die Kurve in der Mannigfaltigkeit, für die die Länge l in obiger Formel ein Minimum ist. Das läßt sich mit Hilfe der Differentialgeometrie formal exakt ausdrücken, was wir aber hier nicht weiter vertiefen wollen (siehe dazu z.B. [53]). Geometrisch bedeutet das, daß, ganz analog wie bei der Definition der Geraden in der Euklidischen Geometrie, auch bei beliebigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten die Tangente an die Geodäte in einem beliebigen Punkt parallel verschoben ist zu der in einem vorhergehenden Punkt.

Für die Allgemeine Relativitätstheorie betrachten wir nun vierdimensionale Mannigfaltigkeiten, die lokal der Geometrie der Speziellen Relativitätstheorie gleicht. Ganz streng genommen liegt hier eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit vor, denn lokal ist die Geometrie nicht Euklidisch, sondern pseudo-Euklidisch. Aber diese Spitzfindigkeit soll uns nicht weiter berühren. In einem beliebigen Punkt der Mannigfaltigkeit gilt demnach entsprechend (1.14)

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}.$$

Global gilt diese Metrik aber nicht, die $g_{\mu\nu}$ hängen im allgemeinen Fall von dem Ort im Raum ab. Durch die Arbeiten von RIEMANN, RICCI und LEVI-CIVITA stand EINSTEIN ein mathematisches Gerüst zur Beschreibung von Mannigfaltigkeiten zur Verfügung, auf das er für die Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie zurückgreifen konnte.

2.4 Einsteins Feldgleichungen

Mit der Differentialgeometrie gekrümmter Mannigfaltigkeiten hatte EINSTEIN ein Mittel zur Hand, das ihm helfen konnte, die Gesetze der Gravitation zu formulieren. Um aber eine physikalische Theorie mit solch einem Hilfsmittel zu generieren, muß das mathematische Konzept mit bestimmten physikalischen Gegebenheiten identifiziert werden. In Kap. 2.3 haben wir gesehen, daß die Raumzeit eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit darstellt und daß es bei ungleichförmigen Gravitationsfeldern kein globales Inertialsystem geben kann

(siehe dazu z. B. Abb. 2.1 auf S. 28). Hinter diesen Aussagen stehen zwei Beziehungen zwischen Mathematik und Physik (nach [53]):

- a) Die Menge aller Ereignisse (Events) – die Raumzeit – ist eine vierdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Metrik.
- b) Die Metrik ist durch Messungen mit Hilfe von Stäben und Uhren meßbar. Die Entfernung zwischen zwei nahe beieinander liegenden Punkten, durch einen Maßstab gemessen, ist gegeben durch $|d\vec{x} \cdot d\vec{x}|^{1/2}$. Der Zeitunterschied zwischen zwei Events, die sich kurz nacheinander ereignen, durch eine Uhr gemessen ist $|-d\vec{x} \cdot d\vec{x}|^{1/2}$.

Es existieren demnach keine Koordinaten, in denen überall die Beziehung für die raumzeitliche Entfernung

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

wie in der Speziellen Relativitätstheorie gilt. Allerdings haben wir auch gesehen, daß solch ein Bezugssystem und solch eine Metrik lokal existiert. Das bedeutet, daß in dieser Mannigfaltigkeit lokal ein Koordinatensystem definiert werden kann, das der Minkowski-Welt entspricht. Wir können also eine weitere Beziehung zwischen Mathematik und Physik formulieren:

- c) In jedem Punkt der Raumzeit, d.h. zu jedem Ereignis, kann die Metrik der Raumzeit durch die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems in die Form gebracht werden, wie wir sie aus der Lorentz-Transformation kennen mit dem metrischen Tensor $\{\eta_{\alpha\beta}\}$ (siehe (1.14) S. 20).

Zur endgültigen Formulierung der Theorie sind daher noch zwei Dinge zu klären:

1. wie bewegen sich physikalische Objekte in der gekrümmten Raumzeit und
2. wie krümmen die Objekte die Raumzeit.

In der Folge werden wir zunächst erstere Frage besprechen, während die Lösung der zweiten Frage direkt auf die Formulierung der Feldgleichungen führt. Bevor wir aber das angehen, soll noch auf die Punkte hingewiesen werden, die für EINSTEIN bei der Herleitung seiner Allgemeinen Relativitätstheorie von besonderer Bedeutung waren. Zum einen mußten die Gleichungen in der Näherung bei schwachen Gravitationsfeldern und kleinen Geschwindigkeiten (verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit) die Gesetze der NEWTONschen Bewegungsgesetze unter Einfluß der Gravitation ergeben – Jürgen Renn [48] nennt das das Korrespondenzprinzip; zum anderen sollen die aus der klassischen Mechanik bekannten Erhaltungssätze auch in der Allgemeinen Relativitätstheorie gelten.

Im Kapitel 2.1 haben wir an dem Fahrstuhlbeispiel gesehen, daß auf ein in einem Gravitationsfeld frei fallender Körper keine (Gravitations-) Kräfte wirken und daher in seiner unmittelbaren Umgebung andere, mit ihm frei fallende Körper, keine Beschleunigung erleiden. Der Körper befindet sich demnach in

einem lokalen Inertialsystem. Da der Körper keinerlei Beschleunigung in seinem lokalen Bezugssystem erfährt, bewegt er sich lokal auf einer Geraden. An dem Beispiel in Abb. 2.4 auf S. 35 konnten wir zeigen, daß eine geradlinige Bewegung in einem lokalen Bezugssystem global zu einer Bewegung entlang einer Geodäte führt. Wir können also definieren, wie die Bewegung eines Körpers durch die Metrik einer gekrümmten Mannigfaltigkeit beeinflusst wird:

- d) Frei fallende Körper bewegen sich auf zeitartigen Geodäten der Raumzeit.

Wenn hier von „frei fallend“ die Rede ist, dann wird darunter verstanden, daß diese Körper nur von der Gravitation beeinflusst werden und nicht von anderen Kräften, wie z.B. magnetische oder elektrische. Wir hatten ja schon gesehen, daß nur die Gravitation auf alle Körper gleichermaßen wirkt, im Gegensatz zu den anderen Kräften. Eine Verallgemeinerung von d) bezieht sich auf die Frage, wie andere Kräfte, z.B. die elektromagnetischen, von einer gekrümmten Metrik beeinflusst werden, wie also z.B. die Maxwell-Gleichungen in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit formuliert werden müssen. Das führt auf das *starke Äquivalenzprinzip*:

- d') Jedes physikalische Gesetz, das in der Speziellen Relativitätstheorie in der Tensornotation (= covariant) formuliert werden kann, hat exakt die gleiche Form in dem lokalen Inertialsystem einer gekrümmten Raumzeit.

Dieses Thema soll nicht weiter vertieft werden, wir verweisen für eine weitere Lektüre z.B. auf [53], wo auch Anwendungsbeispiele gezeigt werden.

Der Vollständigkeit halber sei noch die Bestimmungsgleichung für die Geodäte angeführt, ohne aber tiefer ins Detail zu gehen. Aus der Differentialgeometrie erhält man die Geodätengleichungen:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad \alpha = 0 \dots 3 \quad (2.4)$$

In der vierdimensionalen Raumzeit sind das vier Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösungen die Geodäte in Parameterform – in Abhängigkeit des Parameters τ – für die vier Koordinaten x^α beschreiben; die Größe $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$ sind die sog. CHRISTOFFELschen Symbole, die von dem metrischen Tensor \mathbf{g} abhängen. Bei bekannter Metrik läßt sich also mit Hilfe (2.4) die Geodäte für den gekrümmten Raum berechnen. Für einen Raum ohne Krümmung verschwinden die CHRISTOFFELschen Symbole $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha = 0$ und die Geodäte ist eine Gerade. Der Ausdruck (2.4) ist letztendlich der mathematische Ausdruck für die Konstruktion einer „Geraden“ in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit, wie wir sie im Kap. 2.3 beschrieben haben.

Nachdem nun die erste Frage geklärt ist, wie sich Objekte/Körper in der gekrümmten Raumzeit bewegen, soll, bevor wir zur Klärung des zweiten Punktes kommen, auf das NEWTONsche Gravitationsgesetz eingegangen werden. Für NEWTON existiert ein absoluter, dreidimensionaler Euklidischer Raum und eine universelle Zeit. Er fand ein Bewegungsgesetz für Körper mit einer Masse m

unter dem Einfluß eines Gravitationsfeldes – des Gravitationspotentials – ϕ :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \cdot \vec{a} \\ \vec{F} &= -m \nabla \phi\end{aligned}\tag{2.5a}$$

In Worten ausgedrückt, besagt die erste Beziehung, daß eine Kraft \vec{F} , hier hervorgerufen durch das Gravitationsfeld, eine Beschleunigung \vec{a} der trägen Masse m bewirkt. Die zweite Gleichung sagt aus, daß die Kraft \vec{K} proportional dem Gradienten des Gravitationsfeldes ist (der Gradient oder Nablaoperator ist ein Differentialoperator $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, der die Änderung des Feldes ϕ – im Betrag und Richtung – in einem Punkt angibt). Der Proportionalitätsfaktor m der zweiten Gleichung ist die schwere Masse. Nach dem Äquivalenzprinzip sind schwere und träge Masse gleich, so daß bei bekanntem Gravitationsfeld ϕ aus den beiden obigen Gleichungen die Bewegungsgleichung eines Körpers bestimmt werden kann:

$$\vec{a} = -\nabla \phi\tag{2.5b}$$

oder, wenn wir berücksichtigen, daß die Beschleunigung gleich der zweiten Ableitung der Koordinaten nach der Zeit ist, können wir diesen Ausdruck auch schreiben als:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \nabla \phi = 0 \quad \alpha = 1 \dots 3.\tag{2.5c}$$

Die NEWTONSche Theorie liefert dann die Beziehung, um das Gravitationsfeld ϕ zu bestimmen:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho.\tag{2.5d}$$

G ist die Gravitationskonstante und ρ ist die Dichte der Masse(verteilung), die das Gravitationsfeld ϕ erzeugt. ∇^2 ist der Laplace-Operator⁶ – auch ein Differentialoperator – von der Form:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Für den Ausdruck (2.5d) – die POISSON-Gleichung – kann man eine allgemeine verbale Beschreibung geben:

$$\text{Differentialoperator(Feld)} = \text{Quelle}.\tag{2.6}$$

In Worten: ein Differentialoperator, auf das Feld angewandt, ist gleich der Quelle des Feldes. Diese Analogie nutzte EINSTEIN, um die Gleichungen herzuleiten, die den Punkt 2 – wie krümmen die Objekte die Raumzeit – erfüllen.

Wir haben gesehen, daß in der NEWTONSchen Theorie die Quelle der Gravitation die Massendichte ist. In EINSTEINS Theorie muß die Quelle der Gravitation etwas analoges, aber ein der Relativitätstheorie adäquates sein. Die skalare Massendichte kann daher hierfür nicht in Frage kommen. Einstein griff dazu auf den Energie-Impuls-Tensor \mathbf{T} zurück, der bereits in der Speziellen

⁶In älteren Lehrbüchern wird der Laplace-Operator oft noch mit Δ bezeichnet; es ist also $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$

Relativitätstheorie definiert wird und umfaßt, da nach dem Masse-Energie-Äquivalent $E = m c^2$ jedwede Energie auch Masse bedeutet, sowohl die Energiedichte, die Energiestromdichte, den Impuls als auch Scherspannungen in Form einer 4x4-Matrix. Dieser Tensor ist invariant und daher als Quelle für das Gravitationsfeld geeignet. In Anlehnung an (2.6) sollte demnach die Gravitationsgleichung für die Allgemeine Relativitätstheorie die Form haben:

$$\mathbf{O}(\mathbf{g}) = -\kappa \cdot \mathbf{T}. \quad (2.7)$$

Hier ist κ eine noch zu bestimmende Konstante und \mathbf{O} soll ein Differentialoperator sein, der auf den metrischen Tensor \mathbf{g} wirkt⁷. In (2.7) stellt der metrische Tensor \mathbf{g} die Verallgemeinerung des Gravitationsfeldes ϕ der NEWTONschen Theorie dar, denn die Wirkung von Massen auf die Geometrie des Raumes soll ja in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die $\{g_{\alpha\beta}\}$ beschrieben werden.

Der Differentialoperator \mathbf{O} auf der linken Seite des Ausdrucks (2.7) muß nach EINSTEIN (siehe [13] S. 83) folgenden Bedingungen genügen:

1. Er soll keine höheren als zweite Differentialquotienten der $\{g_{\alpha\beta}\}$ enthalten.
2. Er soll in diesen zweiten Differentialquotienten linear sein.
3. Seine Divergenz [heute würde man formulieren: seine kovariante Ableitung] soll identisch verschwinden.

Die ersten beiden Bedingungen sind Aussagen in Analogie zu der POISSON-Gleichung (2.5d). In der Differentialgeometrie wird gezeigt (siehe z.B. [53]), daß sich derartige Operatoren (Differentialtensoren) aus dem RIEMANNschen Tensor $R_{\mu\nu}$ bilden lassen in der Form

$$R_{\mu\nu} + \alpha g_{\mu\nu} R.$$

Dabei ist $R_{\mu\nu}$ der Riemann-Tensor, der die Krümmung der Raumzeit beschreibt, und R ist der Ricci-Skalar, der durch den Ausdruck

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

gebildet wird. In der Speziellen Relativitätstheorie wird gezeigt, daß die Forderung der Energieerhaltung bedeutet, daß die kovariante Ableitung des Energie-Impuls-Tensors gleich null ist. Bildet man in dem Ausdruck (2.7) auf beiden Seiten die kovariante Ableitung, so soll entsprechend der dritten Bedingung die kovariante Ableitung von $\mathbf{O}(\mathbf{g})$ ebenfalls null sein. Damit ist dann gewährleistet, daß für die gesuchten Feldgleichungen die Energieerhaltung gewährleistet ist. Es läßt sich in der Differentialgeometrie nun zeigen, daß in diesem Fall die noch unbekannt Konstante $\alpha = -\frac{1}{2}$ ist. Damit erhalten wir schließlich mit dem Einstein-Tensor $G_{\mu\nu}$, der definiert ist als

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R,$$

⁷Einstein nennt in seiner Veröffentlichung [10] den metrischen Tensor „Fundamentaltensor“.

für die gesuchten Feldgleichungen:

$$G_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu} \quad (2.8a)$$

mit dem noch unbekanntem Parameter κ . Sowohl der Einstein-Tensor als auch der Energie-Impuls-Tensor ist eine 4x4-Matrix; der Ausdruck (2.8a) entspricht deshalb einem System von 10 gekoppelten Differentialgleichungen (eigentlich müßten es 16 sein (4x4=16), aber da die Matrizen symmetrisch sind, sind es nur 10). Aus diesem Grund spricht man nicht von *der*, sondern von *den* Feldgleichungen. Aus der Forderung, daß die EINSTEINSchen Feldgleichungen das korrekte Verhalten der Planeten im Sonnensystem wiedergeben sollten, wurde der Wert der Konstanten κ zu

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \approx 1,87 \cdot 10^{-26} \text{ sec}^2 \text{ m}^{-1} \text{ kg}^{-1} \quad (2.8b)$$

festgelegt, so daß die Feldgleichungen in der endgültigen Form

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

lauten. Damit hatte EINSTEIN das Gesetz der Gravitation gefunden. Später hat er noch ein weiteres Glied in seine Feldgleichungen eingefügt [11], weil sich zeigte, daß – vermeintlich – ohne dieses eine statische Lösung kosmologischer Modelle nicht möglich war (in Kap. 3.1 wird das im Detail erläutert werden). Mit der kosmologischen Konstanten Λ ergeben sich so die erweiterten Feldgleichungen zu

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Der Vollständigkeit halber und da es in der Literatur zur Allgemeinen Relativitätstheorie verschiedentlich auftaucht, sei erwähnt, daß die Feldgleichungen in der Form (2.10) über einen Zwischenschritt

$$R - 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad (2.11)$$

umgeformt werden können zu

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \quad (2.12)$$

mit dem RIEMANNschen Tensor $R_{\mu\nu}$ und $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$. Vernachlässigt man die kosmologische Konstante Λ so erhalten wir aus (2.10) bis (2.12) die verkürzten Feldgleichungen

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} &= -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \\ R &= \frac{8\pi G}{c^4} T \\ R_{\mu\nu} &= -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

denen die meisten Bestimmungen von Gravitationsfeldern zugrunde liegen, wie wir weiter unten noch sehen werden⁸.

Nachdem aber EDWIN HUBBLE die Rotverschiebung der Galaxien und damit die Expansion des Universums nachgewiesen hatte, zog EINSTEIN diese Konstante wieder zurück und bezeichnete angeblich deren Einführung als „die größte Eselei seines Lebens“. Wir werden später noch ausführlich auf diese kosmologische Konstante zurückkommen, die heute wieder brandaktuell ist.

Wir haben gerade in wenigen Zeilen die EINSTEINSchen Feldgleichungen hergeleitet; wenn die Lösung einmal gefunden ist, ist das einfach. Für EINSTEIN aber war es ab 1907 ein langer Weg voller Rückschläge, Irrwege und Enttäuschungen, bis er endlich Ende 1915 das Ergebnis der Akademie der Wissenschaft präsentieren konnte. Die Schwierigkeit lag weniger in der mathematischen Formulierung der Gleichung, als vielmehr in dem Nachweis, daß sie den Erhaltungssätzen der Physik genügen sollen. Er selbst hat darüber berichtet (zitiert in [48] S. 232):

Es ist natürlich leicht, diese allgemein kovarianten Gleichungen hinzusetzen, schwer aber, einzusehen, daß sie Verallgemeinerungen von Poissons Gleichungen sind, und nicht leicht einzusehen, daß sie den Erhaltungssätzen Genüge leisten.

Die bahnbrechende Arbeit „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“ [10] wurde 1916 in den Annalen der Physik veröffentlicht.

Ergänzend sei noch erwähnt, daß man in neueren Lehrbüchern häufig als Wert der Konstanten $\kappa = 8\pi$ in den Feldgleichungen (2.8a) findet; es wurde dabei einfach $c = 1$ und $G = 1$ gesetzt. Wir hatten in Kap. 1.1 schon mal auf diese Art von geometrischen Einheiten hingewiesen. Auch wenn diese Einheiten uns sehr ungewohnt erscheinen, so ist deren Anwendung bei Problemstellungen im Zusammenhang mit der Gravitation doch nicht von der Hand zu weisen. Ein Beispiel möge das verdeutlichen. Die Masse der Erde M_{\oplus} kann durch Vermessung der Satellitenbahnen mit Hilfe der NEWTONSchen Gesetze bestimmt werden (die Berechnung mit Hilfe der Allgemeinen Relativitätstheorie ist in diesem Fall nicht erforderlich):

$$m_{Sat.} \cdot a = \frac{G \cdot M_{\oplus} m_{Sat.}}{r^2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{G \cdot M_{\oplus}}{r^2}$$

Die Masse des Satelliten $m_{Sat.}$ kürzt sich heraus, spielt also bei der weiteren Rechnung keine Rolle mehr. Der Bahnradius r kann mit Hilfe von Lasermessungen extrem genau gemessen werden. Was man aus diesen Untersuchungen findet, ist der Wert des Produktes $G \cdot M_{\oplus}$ aus der Gravitationskonstanten und

⁸In der Literatur findet man häufig im Unterschied zu hier ein positives Vorzeichen vor dem Λ -Glied. Der Grund liegt einfach in einer unterschiedlichen Definition des Linienelementes $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Hier hat – der Konvention EINSTEINS folgend – die zeitlichen Komponente g_{00} ein negatives Vorzeichen, im Gegensatz zu den anderen Darstellungen. Die kosmologische Konstante Λ sollte nach EINSTEIN einen (kleinen) positiven Wert haben.

der Masse der Erde. Man erreicht dabei Genauigkeiten auf 8 Stellen hinter dem Komma. Setzt man nun $G = 1$ so ist auch der Wert für die Masse der Erde auf 8 Stellen hinter dem Komma bekannt – allerdings in der geometrischen Einheit Meter [m] (siehe Tabelle D.1 im Anhang D S. 159). Die Gravitationskonstante ist, wegen der Schwierigkeit ihrer Messung, nur auf 4 Stellen hinter dem Komma bekannt, entsprechend dann natürlich auch die Masse der Erde, wenn man sie in SI-Einheiten [kg] angeben will. Analog verfährt man bei der Bestimmung der Sonnenmasse M_{\odot} . Im Anhang D sind die Werte einiger weiterer Naturkonstanten sowohl in SI- als auch in geometrischen Einheiten aufgelistet.

2.5 Einsteins Näherungslösungen der Feldgleichungen

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, daß EINSTEINS Feldgleichungen in der Form (2.9) und der erweiterten entsprechend (2.10), jeweils 10 gekoppelten Differentialgleichungen darstellen. Auf deren linke Seite taucht die Metrik in Form der Komponenten $\{g_{\mu\nu}\}$ des metrischen Tensors auf und auf der rechten Seite steht der Energie-Impuls-Tensor, der die Verteilung der Massen, ihres Impulses, der Energie usw. im Raum beschreibt. Wäre nun der Energie-Impuls-Tensor bekannt und könnte man ihn aufgrund der Massenverteilung, ihrer Bewegung usw. auch formelmäßig beschreiben, dann könnte man theoretisch mit Hilfe der Feldgleichungen die Geometrie des Raumes berechnen. Für die Kosmologie hieße das, könnte man mit Hilfe der Astronomie die räumliche Verteilung der Sterne, d.h. die gravitierenden Massen, bestimmen, dann hätte man die für den Energie-Impuls-Tensor wichtigste Größe gewonnen, die Materiedichte in Abhängigkeit von Ort und Zeit ($\rho = f(x^0, x^1, x^2, x^3)$). Zusätzlich würde man hier die vereinfachende Annahme machen, alle elektrodynamischen Erscheinungen unberücksichtigt zu lassen. Wenn die 10 Differentialgleichungen gelöst sind, werden wir, wie ALEXANDER FRIEDMANN (1888–1925) in seiner Schrift „Die Welt als Raum und Zeit“ ([19] S. 106) 1923 schreibt „... sowohl die Geometrie der Welt als auch die Verteilung der gravitierenden Massen zusammen mit ihren Weltlinien kennen“. Er macht aber gleich die Einschränkung, daß diese Aufgabe praktisch unlösbar ist. Weder gelingt es, die Verteilung der Massen einigermaßen genau zu bestimmen, noch gelingt es, die 10 Feldgleichungen in ihrer vollen Allgemeinheit zu lösen. Es müssen vielmehr gewisse vereinfachende Annahmen über die Verteilung der Massen gemacht werden, um so die Geometrie des Raumes zu bestimmen. Im Folgenden werden wir einige wichtige Beispiele dafür kennen lernen.

Unter vereinfachenden Bedingungen sind die Feldgleichungen durchaus lösbar, wie EINSTEIN bereits in seiner Veröffentlichung 1916 zur Allgemeinen Relativitätstheorie [10] gezeigt hat. Bei Riemannschen Mannigfaltigkeiten gilt lokal, wie wir schon erwähnt hatten, die Euklidische Geometrie; in der Allgemeinen Relativitätstheorie soll lokal entsprechend die Geometrie der Minkowski-Welt gelten, also eine pseudo-Euklidische Geometrie mit dem metrischen Tensor nach (1.14) von Seite 20. Die erste Annahme EINSTEINS ist,

daß er nur Gravitationsfelder im Endlichen befindlicher Massen zu Grunde legt und für den metrischen Tensor fordert, daß dessen $\{g_{\mu\nu}\}$ von den Werten (1.14) nur um sehr kleine Werte gegen 1 abweichen. Weiterhin nimmt er an, daß die Geschwindigkeit, die ein Massenpunkt in diesem Gravitationsfeld annehmen kann, sehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Mit diesen beiden Annahmen kann EINSTEIN zeigen, daß sich aus seinen Feldgleichungen (2.8a) in dieser Näherung die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes nach der NEWTONSchen Theorie ergibt, und daß damit der Wert der Konstante κ (2.8b) bestimmt ist. Dies war für ihn ein wesentliches Ergebnis, denn eine wichtige Forderung bei der Suche nach der Theorie der Gravitation war für ihn, daß im Falle schwacher (Gravitations-) Kräfte und kleiner Geschwindigkeiten die klassische Theorie als Näherung gelten muß.

Mit diesen beiden Annahmen und der Forderung, daß die Masse ein radialsymmetrisches Gravitationsfeld erzeugt (wie z.B. bei einem Stern oder unserer Sonne), kann EINSTEIN zwei für die Akzeptanz seiner Allgemeinen Relativitätstheorie entscheidende Ergebnisse herleiten. Zum einen ergibt sich aus seinen Feldgleichungen (in der Näherung), daß ein Lichtstrahl, der an der Sonne vorbeigeht, um einen Winkel von 1,7 Bogensekunden abgelenkt wird. Man kann die Lichtablenkung durchaus mit der NEWTONSchen Theorie berechnen und erhält einen Wert der Ablenkung von 0,875 Bogensekunden. Diesen Wert hatte bereits 1804 der Deutsche Astronom JOHANN GEORG VON SOLDNER veröffentlicht⁹ [59], eine Überprüfung dieser Lichtablenkung war aber zu der damaligen Zeit mit den vorhandenen astronomischen Mitteln nicht durchführbar. Für mathematisch Interessierte ist in Anhang C die Lichtablenkung auf Basis der klassischen Mechanik berechnet. Erst 1919 konnte anlässlich einer Sonnenfinsternis von FRANK WATSON DYSON und ARTHUR STANLEY EDDINGTON [8] die Lichtablenkung am Sonnenrand gemessen und der EINSTEINSche Wert bestens bestätigt werden; ein klassischer Fall von Falsifizierung einer Theorie – hier des NEWTONSchen Gravitationsgesetzes. Es ging also hier nicht um kleine Unterschiede in den Ergebnissen, sondern immerhin um einen Faktor zwei. Damit war die Allgemeine Relativitätstheorie auch experimentell abgesichert und von da an erlebte EINSTEIN selbst in der Öffentlichkeit große Anerkennung.

Ebenfalls schon in seiner Originalarbeit [10] konnte EINSTEIN den Wert ε der Periheldrehung eines Planeten bestimmen. Mit den oben angegebenen Näherungen errechnete er aus seinen Feldgleichungen den Wert

$$\varepsilon = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

pro Umlauf. Dabei ist a die große Halbachse, e die Exzentrizität und T die Umlaufzeit. Für den Planeten Merkur ergibt sich so die Periheldrehung zu 43 Bogensekunden pro Jahrhundert in Richtung der Bahnbewegung. URBAIN JEAN JOSEPH LE VERRIER (1811–1877) hatte in der Mitte des 19. Jahrhunderts

⁹NEWTON erwähnt bereits in seiner 1704 veröffentlichten Abhandlung „Opticks“, daß Lichtteilchen durch Gravitation in der selben Weise beeinflusst werden wie normale Materie.

die Merkurbahn genau vermessen und einen Wert für die Periheldrehung von 530 Bogensekunden gefunden (heutiger Wert: 571,91" pro Jahrhundert). Der größte Teil des Effektes ließ sich mit Hilfe der Himmelsmechanik als Störung durch die übrigen Planeten erklären, ein Rest aber blieb unerklärlich – der moderne gemessene Wert für diesen Rest beträgt 43,11" pro Jahrhundert. Bis zu EINSTEINS Resultat versuchte man mit verschiedenen Erklärungen den Rest der Periheldrehung des Merkurs zu begründen. So modifizierte z.B. HUGO VON SEELIGER (1849–1924) in [56] das NEWTONSchen Gravitationsgesetzes durch einen Faktor $e^{-\lambda r}$ zu

$$K = Gm_1m_2 \frac{e^{-\lambda r}}{r^2}.$$

Das bedeutet, daß die Anziehungskraft nicht wie bei Newton mit $1/r^2$ sondern etwas stärker mit wachsendem r abnimmt. Aus dem Wert der Periheldrehung des Merkur, die 43 Bogensekunden, bestimmte er dann den Wert von λ zu $\lambda = 0,000\,000\,38$. Dieser Ansatz kann aber nicht befriedigen, denn er ist eher ein „Kurieren an Symptomen“ als eine physikalische Erklärung; außerdem liefert dieser Ansatz vollkommen falsche Werte für die Periheldrehungen von Venus, Erde und Mars, im Gegensatz zu EINSTEINS Gravitationsgesetz.

Im Rahmen der Näherung kann EINSTEIN auch das Verhalten von Maßstäben und Uhren in dem statischen radialsymmetrischen Gravitationsfeld, wie es z.B. von unserer Sonne oder einem Stern erzeugt wird, aufzeigen (siehe [10] S. 121). Bei diesen Überlegungen muß unterschieden werden zwischen den „lokal“ – d.h. in der Umgebung, in der die Minkowski-Welt gültig ist, – gemessenen Längen und Zeiten einerseits und den Koordinatendifferenzen in dem globalen (gekrümmten) Raum. Legen wir z.B. lokal in radialer Richtung einen Stab der Länge l_{lokal} an, so erscheint dieser in Bezug auf das globale Koordinatensystem durch das Gravitationsfeld verkürzt zur Länge $l_{\text{Koord.}}$. Wird er dagegen tangential angelegt, hat das Gravitationsfeld keinerlei Einfluß auf die gemessene Stablänge. Für den radial angelegten Stab kann auch im Rahmen der gemachten Näherung der Betrag der Längenänderung angegeben werden:

$$l_{\text{Koord.}} \approx l_{\text{lokal}} \cdot \left(1 - \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot r} \right). \quad (2.14a)$$

Hier ist wieder G die die Gravitationskonstante, M ist die das Gravitationsfeld erzeugende Masse und r der Abstand vom Mittelpunkt der (kugelförmig angenommenen) Masse¹⁰, in dem die Längenänderung festgestellt werden soll. Dabei soll natürlich sehr weit entfernt von der Masse gemessen werden, damit die oben gemachten Annahmen der Näherung erfüllt sind. Man kann also konstatieren, daß in einem Gravitationsfeld selbst in dieser ersten Näherung die Euklidische Geometrie nicht gültig ist. Der Effekt ist allerdings äußerst gering, als daß er selbst in unserem Sonnensystem für praktische Anwendungen in Betracht gezogen werden müßte. Setzen wir z.B. für M die Sonnenmasse und für r die Entfernung Sonne/Erde in obige Formel ein, so erhalten wir für den Längenunterschied einen Wert in der Größenordnung von $5 \cdot 10^{-9}$. Man

¹⁰Weiter unten werden wir sehen, daß es korrekt heißen muß „vom Schwarzschildradius aus gemessen“.

kann also innerhalb unseres Sonnensystems getrost mit der Euklidischen Geometrie rechnen, ohne einen großen Fehler zu machen.

Für eine in dem statischen Gravitationsfeld (wie gerade beschrieben) ruhende Uhr berechnet EINSTEIN in der beschriebenen Näherung für die Änderung zwischen „lokaler“ und globaler Anzeige der Zeiten t_{lokal} und $t_{\text{Koord.}}$ die Beziehung

$$t_{\text{Koord.}} \approx t_{\text{lokal}} \cdot \left(1 + \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot r} \right). \quad (2.14b)$$

Eine Uhr geht also langsamer, wenn sie sich in der Nähe von Massen befindet, wobei der Effekt in gleicher Größenordnung klein ist, wie bei der Längenänderung. EINSTEIN erwähnt in [10] schon, „... daß die Spektrallinien von der Oberfläche großer Sterne zu uns gelangenden Lichtes nach dem roten Spektralende verschoben erscheinen müssen“. Am Beispiel der Sonne sei das im Folgenden gezeigt. Aus dem Ausdruck (2.14b) können wir die Frequenzunterschiede zwischen einer Spektrallinie lokal ν_{lokal} und unter Berücksichtigung der Gravitation (Raumkrümmung) $\nu_{\text{Koord.}}$ bestimmen:

$$t_{\text{Koord.}} \approx t_{\text{lokal}} \cdot \left(1 + \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot r} \right) \rightarrow \frac{1}{\nu_{\text{Koord.}}} = \frac{1}{\nu_{\text{lokal}}} \cdot \left(1 + \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot r} \right).$$

Für die relative Frequenzänderung erhalten wir daraus

$$\frac{\nu_{\text{Koord.}} - \nu_{\text{lokal}}}{\nu_{\text{lokal}}} = \frac{1}{1 + \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot r}} - 1.$$

Den Bruch auf der rechten Seite obiger Gleichung können wir in Reihe entwickeln und nach dem ersten Reihenglied abbrechen. Damit ergibt sich schließlich für den gesuchten relativen Frequenzunterschied:

$$\frac{\nu_{\text{Koord.}} - \nu_{\text{lokal}}}{\nu_{\text{lokal}}} = \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx - \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot r}; \quad (2.14c)$$

tatsächlich eine Rotverschiebung, da wegen des negativen Vorzeichen auf der rechten Seite $\nu_{\text{Koord.}} < \nu_{\text{lokal}}$ ist. Diese Beziehung auf die Sonne angewandt, mit $r = \text{Sonnenradius}$, ergibt für eine Spektrallinie eine relative Rotverschiebung von $\approx 2 \cdot 10^{-6}$. Das ist spektroskopisch zwar durchaus nachweisbar, aber durch Turbulenzen in der Sonnenatmosphäre und Temperatureffekte sind die Spektrallinien derart verbreitert, daß die Rotverschiebung, hervorgerufen durch die Gravitation, nicht nachzuweisen ist.

Trotz der Kleinheit des Effektes der Gravitationsrotverschiebung ist es POUND und REBKA 1959 aber gelungen, ihn selbst auf der Erde nachzuweisen [46]. Mit Hilfe des Mößbauer-Effektes konnten sie den Unterschied der Rotverschiebung zwischen einem Höhenunterschied von 22,5 m messen. Um die Größenordnung des Effektes abzuschätzen, bezeichnen wir mit ν_o die Frequenz, gemessen am oberen Ende der Meßstrecke, deren Ende sich in der Entfernung r_o vom Erdmittelpunkt befindet; entsprechend die Frequenz ν_u am unteren Ende mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt $r_u = \text{Erdradius}$. Die Differenz

$r_o - r_u$ entspricht dann den genannten 22,5 m. Mit der Gleichung (2.14c) erhalten wir dann für den Unterschied der Rotverschiebung zwischen den beiden Entfernungen r_o und r_u :

$$\frac{\nu_o - \nu_u}{\nu_{\text{lokal}}} = \frac{G \cdot M_{\oplus}}{c^2} \left(\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r_u} \right) = - \frac{G \cdot M_{\oplus}}{c^2 r_o r_u} (r_o - r_u).$$

Dabei ist M_{\oplus} die Masse der Erde. Berücksichtigen wir, daß $r_o r_u$ praktisch dem Quadrat des Erdradius r_{\oplus} entspricht und $r_o - r_u = \Delta h$ der Abstand der Meßpunkte (22,5 m) ist, dann können wir für die letzte Gleichung schreiben

$$\frac{\nu_o - \nu_u}{\nu_{\text{lokal}}} = \frac{G \cdot M_{\oplus}}{c^2 r_{\oplus}^2} \Delta h$$

Nun ist aber

$$\frac{G \cdot M_{\oplus}}{r_{\oplus}^2} = g$$

die Erdbeschleunigung, so daß wir endgültig für die Differenz der Rotverschiebung

$$\frac{\nu_o - \nu_u}{\nu_{\text{lokal}}} = \frac{g}{c^2} \Delta h \quad (2.14d)$$

erhalten. Berücksichtigen wir die Beziehung $E = h \cdot \nu$ aus der Quantentheorie, so ist die Energieänderung des Photons bei der Überbrückung der Höhendifferenz Δh gegeben durch

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{g}{c^2} \Delta h. \quad (2.14e)$$

Setzen wir die Größen des Experiments $g = 9,81$ und $\Delta h = 22,5$ m ein, so erhalten wir für die relative Energiedifferenz, resp. Differenz der Rotverschiebung, einen Wert von $2,5 \cdot 10^{-15}$; trotz dieses sehr kleinen Wertes gelang es doch POUND und REBKA den Effekt mit einer Fehlertoleranz von 10 % nachzuweisen. In einem neuen Experiment konnte 1964 von POUND und SNIDER [47] die Fehlergrenze auf 1 % reduziert werden. Ein weiteres Experiment mit einem Wasserstoff-Maser 1980 [5] schränkte den Fehler schließlich auf 10^{-4} ein. Neueste quantenmechanische Experimente [42] haben die Fehlergrenze noch weiter eingeschränkt; in dem Experiment von HOLGER MÜLLER und seinen Kollegen flogen Cäsiumatome im Vakuum im freien Fall auf einer Parabelbahn wie ein schräg nach oben geworfener Stein. Durch einen Laserimpuls wurde das Atom in einen verschränkten Zustand zweier Atome versetzt, deren eines der begonnenen Parabelbahn folgte, das andere aber in eine 0,1 mm höhere Bahn katapultiert wurde. Durch einen weiteren Laserimpuls wurden beide Bahnen wieder vereint. Es gelang, durch präzise Messungen den Unterschied der Frequenz der quantenmechanischen Materiewellen – de Broglie-Wellen – der Cäsiumatome auf ihren unterschiedlich hohen Bahnen zu messen und damit die Zeitverschiebung im Schwerfeld der Erde nachzuweisen. Die Meßwerte stimmten innerhalb einer Genauigkeit von $7 \cdot 10^{-9}$ mit dem theoretischen Wert aus EINSTEINS Theorie überein. Die Ergebnisse dieser Experimente sind ein eindeutiger Beweis für die Richtigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie.

2.6 Schwarzschilds exakte Lösung der Feldgleichungen

Schon kurz nach der Veröffentlichung der Allgemeinen Relativitätstheorie [10] durch EINSTEIN präsentierte KARL SCHWARZSCHILD (1873–1916) eine strenge Lösung der Feldgleichungen [55]. Er hatte sich schon länger mit dem Thema gekrümmter Räume und deren Anwendung auf die Astronomie beschäftigt, so war es kein Wunder, daß er das Ergebnis quasi „aus dem Hut zaubern“ konnte. Die von ihm gemachte Voraussetzung einer nicht rotierenden kugelförmigen Masse, umgeben von einem leeren Raum, führt zwar zu einer eingeschränkten Lösung, sie ist aber dennoch von eminenter Bedeutung für die Astronomie und Astrophysik, ist man doch damit in der Lage das Gravitationsfeld in und um Sterne zu berechnen. Ja selbst die Geometrie des (gekrümmten) Raumes in der unmittelbaren Umgebung schwarzer Löcher läßt sich mit der SCHWARZSCHILDschen Lösung untersuchen.

SCHWARZSCHILD teilte die vierdimensionale Metrik ds^2 in einen zeitlichen und einen dreidimensionalen räumlichen Anteil

$$ds^2 = g_{oo} dt^2 - \sum_1^3 g_{ik} dx^i dx^k$$

Bei dieser Formel wird bewußt von der EINSTEINSchen Summenkonvention Abstand genommen, um den Lösungsweg deutlich zu machen. Mit der Voraussetzung der kugelförmigen Masse in dem leeren Raum konnte SCHWARZSCHILD nun den räumlichen Teil der Maßbestimmung mit Hilfe von räumlichen Polarkoordinaten – Kugelkoordinaten – beschreiben; die Kugelkoordinaten sind im Anhang A.2 durch die Gleichungen (A.4b) und die entsprechende (räumliche) Metrik durch (A.4c) definiert.

Unter diesen Annahmen konnte nun SCHWARZSCHILD eine strenge Lösung der EINSTEINSchen Feldgleichungen (2.10) finden. Wir wollen die Herleitung hier nicht nachvollziehen, sondern verweisen dazu auf z.B. [31] oder [53] und führen gleich das Ergebnis an:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.15a)$$

Der Wert der Größe Λ ist extrem klein¹¹, so daß sie normaler Weise nicht berücksichtigt wird. Daher erhalten wir für die *Schwarzschildmetrik*:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.15b)$$

¹¹In der ursprünglichen, von SCHWARZSCHILD aufgestellten Metrik, war das Λ -Glied noch nicht vorhanden; EINSTEIN führte es erst nach dessen Tod 1916 ein.

Die Integrationskonstante M hat die Dimension einer Länge und es läßt sich zeigen, daß sie unter den gemachten Annahmen gegeben ist durch

$$M = \frac{G \cdot m}{c^2}. \quad (2.15c)$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante und m die Masse des Zentralkörpers. Aus der Gleichung (2.15b) können wir erkennen, daß für $r = 2M$ der Nenner in dem Glied mit dr^2 Null wird und damit die ganze Gleichung ihren Sinn verliert. Die Schwarzschildmetrik ist demnach nur für Werte $r > 2M$ definiert. Diese Grenze \mathfrak{R} , definiert durch

$$\mathfrak{R} = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2} \quad (2.16)$$

wird *Schwarzschildradius* genannt. Setzen wir in (2.16) für m die Masse der Sonne aus Anhang D ein, so erhalten wir für den Schwarzschildradius der Sonne $\mathfrak{R}_{\odot} \approx 3$ km, für die Erde gerade mal ≈ 9 mm.

Die physikalische Bedeutung des Schwarzschildradius wird deutlich, wenn man die Fluchtgeschwindigkeit eines Körpers betrachtet; es ist die Geschwindigkeit, die ein Körper z.B. auf der Erde erlangen muß, um sie zu verlassen und in der Unendlichkeit zur Ruhe ($v = 0$) zu kommen – man vernachlässigt dabei auch der Einfachheit halber den Luftwiderstand oder eine Beeinflussung durch den Mond. Betrachten wir einem Probekörper der Masse m , der von der Erdoberfläche mit der Geschwindigkeit v_0 hochgeschleudert wird; die Masse der Erde sei M_{\oplus} und ihr Radius r_{\oplus} . Für diesen Vorgang gilt natürlich, daß die Gesamtenergie E , bestehend aus kinetischer E_{kin} und potentieller Energie E_{pot} , erhalten bleiben muß. Zum Zeitpunkt des Abwurfes an der Erdoberfläche ist die Gesamtenergie

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{GmM_{\oplus}}{r_{\oplus}}.$$

Kommt der Probekörper im Unendlichen zur Ruhe, ist auch $E_{kin} = 0$; die potentielle Energie ist proportional $1/r$ (der Entfernung vom Erdmittelpunkt in unserem Beispiel) und geht demnach auch gegen Null. Das bedeutet aber, daß der Probekörper die Gesamtenergie $E = 0$ beim Abwurf haben muß, um im Unendlichen zur Ruhe zu kommen¹². Setzen wir das in obige Gleichung ein, so ergibt sich

$$0 = \frac{m}{2} v_0^2 - \frac{GmM_{\oplus}}{r_{\oplus}} \rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_{\oplus}}{r_{\oplus}}}. \quad (2.17)$$

Setzt man die Werte für die Erde ein, so erhält man für die Fluchtgeschwindigkeit $11,2 \text{ km s}^{-1}$. Die Fluchtgeschwindigkeit ist demnach umso größer, je

¹²Auf den ersten Blick scheint es verwunderlich, daß die Gesamtenergie beim Abwurf gleich null sein soll. Das kommt aber daher, daß die potentielle Energie definitionsgemäß ein negatives Vorzeichen hat; vom Betrag her gesehen ist die kinetische und die potentielle Energie zum Zeitpunkt des Abwurfes natürlich am größten und wertmäßig gleich.

größer die Masse und je kleiner der Radius ist. Bereits 1784 hatte der englische Naturphilosoph JOHN MICHELL (1724–1793) festgestellt, daß für einen kleinen Körper, der aber schwer genug ist, noch nicht mal das Licht von seiner Oberfläche entweichen kann. Bei gegebener Masse m ergibt sich dann aus (2.17) für den Radius \mathfrak{R}

$$\mathfrak{R} = \frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2},$$

der Wert, den wir oben als Schwarzschildradius erhalten hatten. Diese Größe spielt eine zentrale Rolle bei der Theorie der schwarzen Löcher. Kollabiert z.B. ein Stern der Masse m und wird sein Radius kleiner als \mathfrak{R} , so entsteht ein schwarzes Loch; in den kugelförmigen Raum mit dem Radius \mathfrak{R} können zwar Objekte oder auch Licht eindringen, aber diese Region nie wieder verlassen. Die Kugelfläche, die diese Region begrenzt, heißt Ereignishorizont. Die Theorie schwarzer Löcher, die aufs engste mit dem Namen STEPHEN HAWKING verbunden ist, soll hier in diesem Skriptum nicht weiter verfolgt werden; es wird dazu z.B. auf [53] verwiesen.

Die mittlere konstante Dichte ϱ_S eines schwarzen Loches können wir bestimmen, indem wir sie aus seiner Masse M über die Beziehung

$$\varrho_S = \frac{3}{4\pi} \frac{M}{\mathfrak{R}^3}$$

berechnen. Setzen wir in diese Formel die Beziehung für den Schwarzschildradius aus (2.16) ein, ergibt sich für die mittlere Dichte

$$\varrho_S = \frac{3 \cdot c^6}{32\pi \cdot G^3} \cdot \frac{1}{M^2} = 7,292 \cdot 10^{79} \cdot \frac{1}{M^2}.$$

Die mittlere Dichte eines schwarzen Loches ist demnach umgekehrt proportional zum Quadrat seiner Masse, d.h. je schwerer das schwarze Loch ist, umso geringer ist seine mittlere Dichte. Setzen wir die Masse der Sonne M_\odot in die obige Formel ein, so erhalten wir für die mittlere Dichte des schwarzen Loches der Masse der Sonne:

$$\varrho_S^\odot = 1,843 \cdot 10^{19} \text{ [kg/m}^3\text{]}.$$

Für ein beliebiges schwarzes Loch der Masse M , gemessen in Einheiten der Sonnenmasse M_\odot , erhalten wir daraus für seine mittlere Dichte ϱ_S :

$$\varrho_S = \frac{\varrho_S^\odot}{M^2};$$

in Zentren von Galaxien können sich schwarze Löcher mit einer der 10^8 -fachen Masse der Sonne befinden. Deren mittlere Dichte liegt dann bei etwa $2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, d.h. etwa bei der mittleren Dichte unserer Sonne.

Kehren wir nach diesem kurzen Ausflug wieder zur Lösung der Feldgleichungen zurück und setzen (2.16) in (2.15b) ein, so erhalten wir endgültig für die Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (2.18)$$

Für sehr große Entfernungen von der kugelförmigen Masse m , d.h. wenn $r \gg \mathfrak{R}$ ist, können wir den Bruch in der Gleichung (2.18) in Reihe entwickeln und erhalten:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (2.19a)$$

oder wenn wir diese Darstellung in Kugelkoordinaten wieder in kartesische Koordinaten überführen:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.19b)$$

Darin ist $r \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Daraus ist ersichtlich, daß für große Werte von r die Schwarzschildmetrik in die Metrik der Minkowski-Welt – pseudo-Euklidische Geometrie – übergeht. Dies gilt allerdings nicht, wenn das Λ -Glied wie in (2.15a) berücksichtigt wird. Darin wird der Einfluß von Λ mit wachsendem r auf die Zeitkomponente immer größer. Aus der Formel (2.19b) für die (genäherte) Schwarzschildmetrik in kartesischen Koordinaten kann man sofort den zugehörigen metrischen Tensor herleiten:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -c^2 \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{r}\right) \end{pmatrix}. \quad (2.19c)$$

Ein Vergleich mit dem metrischen Tensor der Minkowski-Welt (1.14) auf Seite 20 zeigt, daß die Abweichung von der pseudo-Euklidischen Geometrie durch \mathfrak{R}/r gegeben ist. Für die Sonne hatten wir den Schwarzschildradius zu ≈ 3 km ermittelt. Der Radius der Sonne ist $\approx 7 \cdot 10^5$ km; damit erhalten wir für die Abweichung direkt über der Oberfläche der Sonne im freien Raum $\mathfrak{R}/r \approx 4 \cdot 10^{-6}$ (wir werden weiter unten sehen, daß die Schwarzschildmetrik in der Form (2.18) nur für den freien Raum und nicht für das Innere von Sternen Gültigkeit hat). In der Entfernung der Merkur-Bahn von der Sonne ist die Abweichung in der Größenordnung von $\approx 5 \cdot 10^{-8}$, in weiterer Entfernung noch geringer. Das bedeutet, daß man im interplanetaren Raum, wenn es z.B. um die Berechnung von Bahnen von Raumsonden geht, immer noch problemlos die NEWTONSche Theorie anwenden kann.

Auch die Näherungslösungen aus EINSTEINS Originalarbeit [10], wie wir sie im vorhergehenden Kapitel beschrieben haben, lassen sich aus (2.18) ableiten. Betrachten wir dazu zunächst das Verhalten von ruhenden Maßstäben. „Ruhend“ heißt, daß deren Verhalten nicht von der Zeit abhängt, oder anders ausgedrückt, daß $dt = 0$ ist. Wird der Maßstab radial angelegt, so bleiben die Winkel φ und ϑ konstant und damit $d\varphi = d\vartheta = 0$. Die Größe ds spielt die Rolle

der „lokalen“ Länge l_{lokal} , während dr die Länge $l_{\text{Koord.}}$ im Koordinatensystem repräsentiert. Damit erhalten wir aus der Schwarzschildmetrik (2.18)

$$l_{\text{lokal}}^2 = \frac{l_{\text{Koord.}}^2}{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}}$$

oder daraus mit der Definition des Schwarzschildradius (2.16):

$$l_{\text{Koord.}} = l_{\text{lokal}} \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}} \approx l_{\text{lokal}} \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{2r}\right) = l_{\text{lokal}} \left(1 - \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot r}\right),$$

das Ergebnis, das auch Einstein (2.14a) erhalten hatte. Wird der ruhende Maßstab in der Entfernung $r \gg \mathfrak{R}$ aber tangential angelegt, so ist $dr = 0$ und wir erhalten aus der Schwarzschildmetrik (2.18):

$$ds^2 = r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Das ist die Euklidische Metrik einer Kugeloberfläche in Kugelkoordinaten ausgedrückt (siehe (A.2b) im Anhang A.1) und in solch einer Metrik treten keinerlei Längenänderungen ein.

Betrachten wir die ruhende Uhr an einem festen Ort im Raum (wieder mit $r \gg \mathfrak{R}$), so gilt in (2.18) $dr = d\varphi = d\vartheta = 0$. Die Größe ds^2 hat dann einen negativen Wert, was bedeutet, daß es eine zeitartige Größe ist, deren Wurzel $\sqrt{ds^2}$ imaginär würde. Physikalisch relevant ist aber nur der reelle Wert. Berücksichtigen wir weiterhin, daß die Einheiten auf der Zeitachse in [ct] angegeben werden, so erhalten wir aus (2.18) für die Zeit t_{lokal}

$$t_{\text{lokal}}^2 = t_{\text{Koord.}}^2 \left(1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}\right).$$

Daraus ergibt sich nach einfachen Umformungen und Reihenentwicklung

$$t_{\text{Koord.}} = \frac{t_{\text{lokal}}}{\sqrt{1 - \frac{\mathfrak{R}}{r}}} \approx t_{\text{lokal}} \left(1 + \frac{\mathfrak{R}}{2r}\right)$$

das identische Ergebnis wie EINSTEINs Näherungslösung (2.14b); Uhren gehen in einem Gravitationsfeld langsamer.

Mit Hilfe der Schwarzschildmetrik lassen sich natürlich auch die Periheldrehung und die Lichtablenkung ganz allgemein für nicht rotierende kugelförmige Massen ableiten, was aber hier zu weit führen würde; für mathematisch Interessierte und Versierte sei dazu auf [31] oder [53] verwiesen.

Das statische Gravitationsfeld der Schwarzschildmetrik gilt streng genommen nur für den leeren Raum. Sie ist so bestimmt, daß sie den EINSTEINschen Gleichungen für den leeren Raum genügt, d.h. daß der Energie-Impuls-Tensor in allen seinen Elementen Null ist $\{T_{\mu\nu} = 0\}$. Aus (2.18) ist aber auch ersichtlich, daß die radiale Komponente r als untere Grenze den Schwarzschildradius

\mathfrak{R} hat, der für alle bekannten Sterne sehr klein im Verhältnis zu deren Radius ist. Trotzdem kann in dieser Form die Schwarzschildmetrik für das Sterninnere nicht angewandt werden, denn hier muß der Energie-Impuls-Tensor für die Sternmaterie berücksichtigt werden. SCHWARZSCHILD hat für dieses Problem 1916 auch schon eine Lösung präsentiert [54], indem er die Sternmaterie als inkompressible Flüssigkeit ansah. Realistischere Annahmen für das Sterninnere und Lösungen für die dortige Schwarzschildmetrik werden z.B. in [53] angegeben, sollen aber hier nicht weiter verfolgt werden.

Kapitel 3

Kosmologische Modelle der Allgemeinen Relativitätstheorie

Kosmologie betrachtet das Universum in großen Dimensionen. Die NEWTONSche Theorie ist eine adäquate Beschreibung der Gravitation solange der Schwarzschildradius \mathfrak{R} sehr klein gegen eine räumliche Dimension r ist, d.h. solange $\mathfrak{R}/r \ll 1$ gilt, oder wenn wir (2.16) aus Kap. 2.6 berücksichtigen:

$$\frac{2 \cdot G \cdot m}{c^2 \cdot r} \ll 1$$

Ist dies der Fall, so haben wir dort gesehen, daß nicht die Schwarzschildmetrik sondern die Metrik der Minkowski-Welt und damit die gewohnten Gesetze NEWTONS gelten. Betrachten wir dagegen aber einen kollabierenden Stern, der im wesentlichen seine ursprüngliche Masse beibehält, dessen Radius aber sehr sehr klein wird, dann wird $\mathfrak{R}/r \ll 1$ nicht mehr gelten; wir nähern uns dann den Verhältnissen in der Umgebung von Neutronensternen oder gar schwarzen Löchern und dort muß die Allgemeine Relativitätstheorie genutzt werden. Untersuchen wir auf der anderen Seite aber einen Raum, der mit Materie einer konstanten Dichte angefüllt ist, dann wächst, wenn wir ein Volumen mit immer größer werdendem Radius r betrachten, die Masse dieses Volumens wie r^3 ; die Beziehung $\mathfrak{R}/r \ll 1$ gilt dann schließlich ebenfalls nicht mehr und die Allgemeine Relativitätstheorie wird in diesem Fall wieder relevant.

In welchen Dimensionen bewegen wir uns in diesem Fall? In Kap. 2.6 hatten wir schon gesehen, daß im gesamten Bereich unseres Sonnensystems ohne Einschränkung die NEWTONSche Theorie genutzt werden kann. Erweitern wir die Dimension auf den Umfang unserer Milchstraße mit ihren etwa 10^{11} Sternen und einem Radius von 15 kpc (1 Parsec [pc] = 3,26 Lichtjahre [Lj] $\approx 3 \cdot 10^{16}$ m); setzen wir die Werte ein, so erhalten wir $\mathfrak{R}/r \approx 10^{-6}$, so daß wir in dieser Dimension noch nicht relativistisch rechnen müssen. Erst bei Skalen, die wesentlich größer als eine Galaxie sind, beginnt das Gebiet der relativistischen Kosmologie.

Unsere Teleskope können bis in eine Entfernung von ca. 10^{11} pc in das Universum schauen, eine gewaltige Dimension, gegenüber der Galaxien winzig sind und sogar Galaxienhaufen mit einem Durchmesser von etwa 10^6 pc sehr klein erscheinen; d.h. die Galaxien sind sehr kleine Objekte in dem gesamten Universum, quasi Staubkörner. Die Durchmusterung zeigt nun (siehe z.B. [53] S. 319), daß über eine Distanz von 10^3 Mpc gemittelt, das Universum ziemlich gleichartig ist; es hat scheinbar überall in etwa die gleiche Dichte. Abschätzungen ergaben einen Wert von mindestens 10^{-28} kg m $^{-3}$. Dieser Wert ist unsicher, da nur die sichtbare Materie aber nicht die dunkle Materie berücksichtigt ist (siehe weiter unten in Kap. 4.1); in Wirklichkeit wird er sicher höher liegen. Benutzen wir diesen Wert der Dichte, um die Distanz r zu berechnen, bei der gerade $\mathfrak{R} = r$ ist (und damit auf jeden Fall relativistisch gerechnet werden muß), so erhalten mit $m = 4\pi\rho r^3/3$ für $r \approx 10^4$ Mpc, eine Entfernung, in der z.B. Quasare oder andere sehr weit entfernte Objekte beobachtet werden können. Um Mißverständnissen vorzubeugen sei ausdrücklich betont, daß die Tatsache, daß in solch einer Distanz $\mathfrak{R} \approx r$ ist, nicht bedeutet, daß sich das Universum dann wie ein schwarzes Loch verhält; es sagt nur, daß bei solchen Skalen die Allgemeine Relativitätstheorie angewandt werden muß.

Im Kap. 2.6 hatten wir A. FRIEDMANN erwähnt, der schon 1923 in seiner Arbeit „Die Welt als Raum und Zeit“ [19] die Unmöglichkeit betonte, aus astronomischen Beobachtungen die Massenverteilung im Universum zu bestimmen, daraus den Energie-Impuls-Tensor zu ermitteln und schließlich damit die EINSTEINSchen Feldgleichungen zu lösen. Will man die Allgemeine Relativitätstheorie in der Kosmologie anwenden, muß man vielmehr über die Verteilung der Materie im Universum vereinfachende Annahmen machen. Die einfachste Näherung, die man dabei machen kann, ist die der Einheitlichkeit im Universum, die man beobachtet. In Dimensionen der Größenordnung 10^3 Mpc ist nicht nur die mittlere Dichte einheitlich, auch die Sterntypen, ihre chemische Zusammensetzung und die unterschiedlichen Arten von Galaxien sind überall in gleicher Weise zu finden. Aus dieser beobachteten Einheitlichkeit können wir schließen, daß das Universum *homogen* ist. Dieser Ansatz der Homogenität ist nichts anderes als das Kopernikanische Prinzip, das aussagt, daß es im Weltall keinen bevorzugten Platz gibt, keinen Mittelpunkt oder sonst eine hervorgehobene Stelle. Das Universum wird, auch wieder durch Beobachtungen gestützt, nicht nur als homogen, sondern zusätzlich auch als *isotrop* angesehen. Das bedeutet, daß, in welche Richtung am Himmel wir auch schauen, sich keine Beobachtung in einer Richtung von der einer anderen unterscheidet. Eine dritte Beobachtungstatsache ist die Expansion des Universums, zuerst 1929 von EDWIN POWELL HUBBLE (1889–1953) überzeugend nachgewiesen; alle Galaxien scheinen sich von uns mit einer Geschwindigkeit weg zu bewegen, die proportional zu ihrer Entfernung ist. Daß sich alle „von uns“ entfernen, wäre ein Verstoß gegen das Kopernikanische Prinzip, es läßt sich aber zeigen, daß diese Fluchtbewegung von jedem Punkt des Universums gleich erscheint – wir kommen in Kap. 3.5 noch ausführlich darauf zurück. Diese Expansion des Universums darf natürlich nicht als Grundannahme in kosmologische Modelle eingehen, sondern sie muß, sollen die Feldgleichungen

die Realität richtig widerspiegeln, vielmehr als Ergebnis der Rechnung herauskommen. Mehr oder weniger erfolgreiche Beispiele werden wir in den folgenden Kapiteln noch kennen lernen.

Auf einen wichtigen Aspekt ist noch hinzuweisen. Wenn astronomische Beobachtungen gemacht werden, muß man, wie z.B. in [53] deutlich gemacht wird, berücksichtigt werden, was wir überhaupt von dem immensen Universum erkennen können. Dazu betrachten wir ein Raum-Zeit-Diagramm wie es

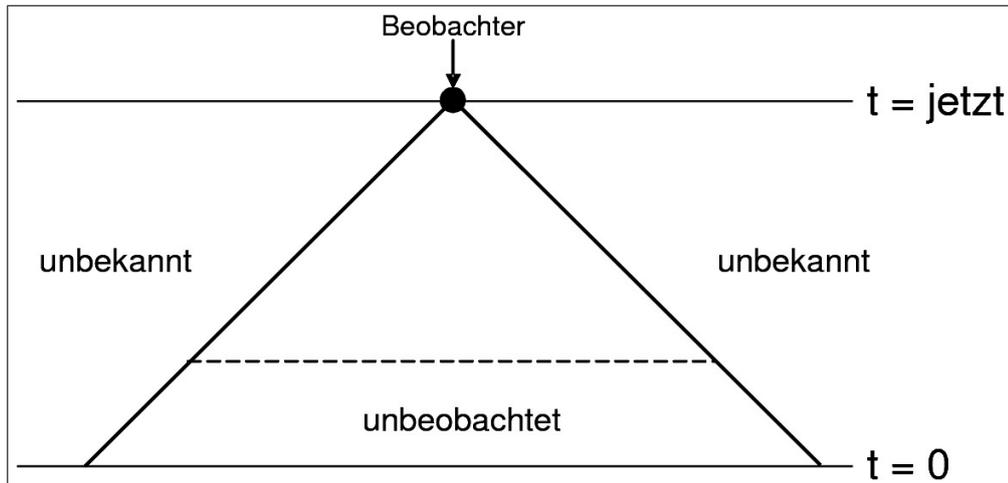


Abbildung 3.1: Zum kosmologischen Prinzip am Beispiel eines statischen Universums; Erläuterung im Text.

in Abb. 3.1 dargestellt ist. Wir nehmen dazu an, daß das Universum zu dem Zeitpunkt $t = 0$ entstanden ist, was ja heute gängige Meinung ist. Alle Strahlung elektromagnetischer Art (Gamma-, Röntgen-, UV-Strahlen, Licht, Radiowellen), die von Objekten im Weltall ausgesandt werden, erreicht uns – den Beobachter in der Abbildung – auf dem Rückwärtslichtkegel. Aus den Bereichen in dem Raum-Zeit-Diagramm, die mit „unbekannt“ gekennzeichnet sind, haben wir zu dem Zeitpunkt $t = jetzt$ noch keine Information erhalten. Monate, Jahre später werden aber Zug um Zug immer mehr Teile dieser unbekannt Bereiche für uns zugänglich; was unsere Kenntnis des Universums ausmacht ist daher retrospektiv und es könnte ja durchaus sein, daß eines Tages der heute noch unbekannt Teil des Universums sich als inhomogen herausstellt. Für die kosmologischen Modelle, wie wir sie in der Folge darstellen werden, wird aber generell angenommen, daß das Universum überall, auch in den noch unbekannt Regionen, homogen und isotrop ist. Diese – letztlich unbewiesene und auch unbeweisbare – Annahme nennt man das *kosmologische Prinzip* und auf ihm basieren heute praktisch alle akzeptierten kosmologischen Modelle. Weiter unten werden wir noch darauf zurückkommen, daß es auch durchaus Ansätze gibt, die das kosmologische Prinzip, z.B. die Homogenität, nicht akzeptieren.

Auf noch einen weiteren Aspekt sei am Beispiel der Abb. 3.1 aufmerksam

gemacht, der „unbeobachtete“ Bereich. Das ist der Bereich unseres Rückwärtslichtkegels, der mit unseren heutigen Instrumenten nicht erreichbar ist, sei es, daß die dortigen Galaxien zu lichtschwach sind, oder sei es, daß wir die Meßmöglichkeit einfach noch nicht zur Verfügung haben (z.B. für Gravitationswellen). Es ist also für das Folgende wichtig, immer diese beiden Grundvoraussetzungen des kosmologischen Prinzips – Homogenität und Isotropie – vor Auge zu haben, denn alle kosmologischen Modelle, die wir betrachten werden, haben es als Voraussetzung.

Die folgenden drei Kapitel 3.1 bis 3.3 bringen die kosmologischen Modelle vor der fundamentalen Entdeckung der Expansion des Universums durch HUBBLE; wer an der wissenschaftsgeschichtlichen Entwicklung nicht so sehr interessiert ist, kann sie getrost überschlagen und gleich zu Kap. 3.4 übergehen, in dem über HUBBLES Entdeckung berichtet wird.

3.1 Einsteins kosmologisches Modell

Schon bald nach seiner Veröffentlichung zur Allgemeinen Relativitätstheorie [10] legte er 1917 der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin seine „Kosmologische[n] Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie“ vor [11]. Er versucht darin unter der vereinfachenden Annahme eines unendlichen Universums mit einer konstanten mittleren Dichte der Materie seine Feldgleichungen (2.9) von Seite 42 auf das gesamte Universum anzuwenden. Sie müßten dann unter der Annahme lösbar sein, daß die Gravitationspotentiale $\{g_{\mu\nu}\}$ im räumlich Unendlichen konstant werden (eine solche Randbedingung muß man in der NEWTONSchen Theorie machen). Diese Annahme führten ihn aber auf unlösbare Schwierigkeiten prinzipieller Art. EINSTEIN mußte feststellen, „... daß mir das Aufstellen von Grenzbedingungen für das räumlich Unendliche nicht gelungen ist“. Er findet aber doch noch einen Ausweg: „wenn es nämlich möglich wäre, die Welt als ein *nach seinen räumlichen Erstreckungen geschlossen*es Kontinuum anzusehen, dann hätte man überhaupt keine derartigen Grenzbedingungen nötig“. Solche räumlich geschlossenen Kontinua waren zu der Zeit aufgrund der RIEMANNschen Geometrie gekrümmter Räume durchaus bekannt, wobei EINSTEIN zur physikalischen Struktur seines Universums zusätzlich folgende Aussagen trifft:

- „Der metrische Charakter (Krümmung) des vierdimensionalen raumzeitlichen Kontinuums wird nach der Allgemeinen Relativitätstheorie in jedem Punkte durch die daselbst befindliche Materie und deren Zustand bestimmt. Die metrische Struktur dieses Kontinuums muß daher wegen der Ungleichmäßigkeit der Verteilung der Materie notwendig eine äußerst verwickelte sein. Wenn es uns aber nur auf die Struktur im großen ankommt, dürfen wir uns die Materie als über ungeheure Räume gleichmäßig ausgebreitet vorstellen, so daß deren Verteilungsdichte eine ungeheuer langsam veränderliche Funktion wird;“ und
- „... daß die Relativgeschwindigkeiten der Sterne sehr klein sind gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. Ich glaube deshalb, daß wir fürs erste folgende

approximierende Annahme unserer Betrachtung zugrunde legen dürfen: es gibt ein Koordinatensystem, relativ zu welchem die Materie als dauernd ruhend angesehen werden darf.“

Dies ist nichts anderes als das damals gültige Weltbild eines statischen (unendlichen) Universums.

Für einen im vierdimensionalen gekrümmten dreidimensionalen Raum ist in Anhang A.2 mit der Formel (A.5c) auf Seite 151 die Metrik für die Hypersphäre mit dem Krümmungsradius $R = 1$ angegeben. Für ein beliebiges R können wir demnach die Metrik wie folgt schreiben:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2 \cdot (d\xi^2 + \sin^2 \xi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) \quad (3.1a)$$

Für ξ in dem Wertebereich $0 < \xi < \pi/2$ machen wir die Transformation $r = R \cdot \sin \xi$:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (3.1b)$$

Leider mußte EINSTEIN aber wieder feststellen, daß diese so definierte Metrik zusammen mit dem Energie-Impuls-Tensor, der sich aus der Annahme gleichmäßiger geringer Dichte im Universum ergibt, seine Feldgleichungen (2.9) keineswegs erfüllen und er stellt fest: „Wenn es also sicher wäre, daß die von mir bisher benutzten Feldgleichungen die einzigen mit dem Postulat der allgemeinen Relativität vereinbaren wären, so müßten wir wohl schließen, daß die Relativitätstheorie die Hypothese von einer räumlichen Geschlossenheit der Welt nicht zulasse“.

Einen Ausweg fand nun EINSTEIN darin, indem die kosmologische Konstante Λ in die Feldgleichungen (2.9) einführte und sie so zu (2.10) erweiterte:

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}.$$

Wird der Wert der positiven Konstanten Λ

$$\Lambda = \frac{c^2 \kappa \rho}{2} = \frac{c^2}{R^2} \quad (3.2)$$

gesetzt, dann werden die Feldgleichungen in der durch die kosmologische Konstante erweiterte Form erfüllt. Geht man also von einem statischen Universum aus, dann bestimmt die mittlere Dichte der Materie sowohl den Wert der Konstanten Λ als auch den Krümmungsradius R des sphärischen (geschlossenen) Raumes. EINSTEIN bemerkt zu diesem Ergebnis: „Der Krümmungscharakter des Raumes ist nach Maßgabe der Verteilung der Materie zeitlich und örtlich variabel, läßt sich aber im großen durch einen sphärischen Raum approximieren. Jedenfalls ist diese Auffassung logisch widerspruchsfrei und vom Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie die naheliegendste; ob sie, vom Standpunkt des heutigen astronomischen Wissens aus betrachtet, haltbar ist, soll hier nicht untersucht werden“. Zum Zeitpunkt seiner Arbeit – 1917 –

war die Expansion des Universums noch nicht entdeckt und das astronomische Weltbild ging von einem statischen Weltall aus. Er betont dann noch ausdrücklich in [11], „daß eine positive Krümmung des Raumes durch die in demselben befindliche Materie auch dann resultiert, wenn jenes Zusatzglied nicht eingeführt wird; das letztere haben wir nur nötig, um eine quasistatistische Verteilung der Materie zu ermöglichen, wie es der Tatsache der kleinen Sternengeschwindigkeiten entspricht“.

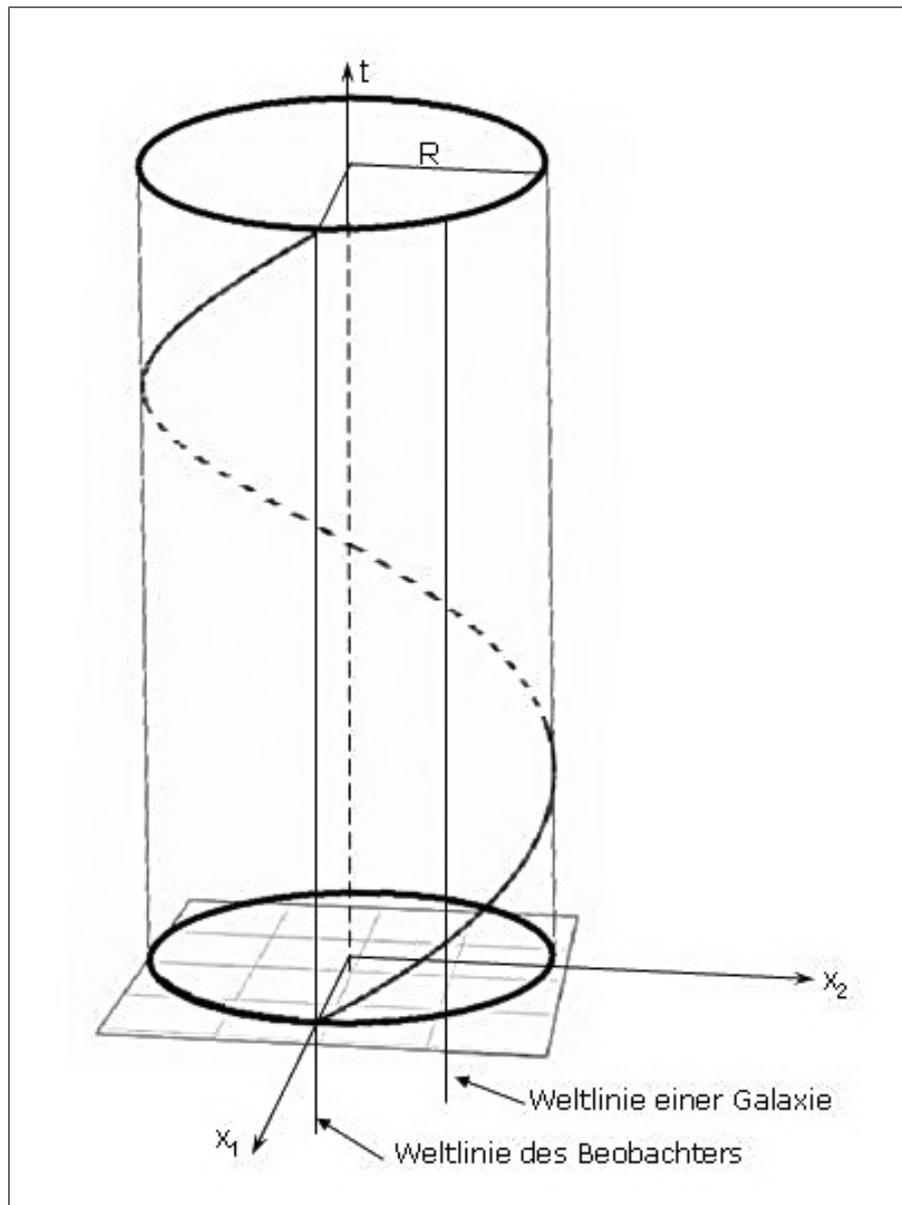


Abbildung 3.2: EINSTEINS „Zylinderwelt“; Erläuterung im Text.

Eine Vorstellung von dem EINSTEINSchen kosmologischen Modell kann man sich verschaffen, indem man ein Raum-Zeit-Diagramm konstruiert; eine Zeichnung einer dreidimensionalen Hypersphäre und einer Zeitdimension

ist schlichtweg unmöglich. Deshalb vernachlässigt man zwei Dimensionen, so daß sich eine eindimensionale Sphäre – ein Kreis – ergibt¹, den man in seinem zeitlichen Verlauf darstellen kann, wie in Abb. 3.2 gezeigt. Dies ist die von dem Mathematiker FELIX KLEIN so bezeichnete „Zylinderwelt“. Die Weltlinien des ruhenden Beobachters und einer ruhenden Galaxie z.B. stellen Gerade parallel zu t-Achse dar, denn die Zylinderwelt ist statisch. Die „Spirale“ in Abb. 3.2 ist der eine Zweig des Vorwärtslichtkegels, der andere, gegenläufige, ist der Übersicht wegen nicht dargestellt. Wie man aus der Abbildung ersehen kann, schneidet der Vorwärtslichtkegel die Weltlinie des Beobachters nach einem Umlauf (mit fortschreitender Zeit auch mehrfach); es treten „Gespenster-Sonnen“ auf, wie sie DE SITTER bezeichnet hat. Das Licht kann also dieses Universum umrunden und zum Ausgangspunkt zurückkehren.

Um ein Gefühl für die Größenordnung von Λ und R zu bekommen, setzen wir für ρ den Wert der „kritischen Dichte“, der ungefähr $1 \cdot 10^{-26} \text{ kg m}^{-3}$ beträgt (zur genauen Definition der kritischen Dichte werden wir in Kap. 3.7 zurückkommen). Setzen wir κ aus (2.8b) und ρ in (3.2) ein, so erhalten wir

$$\Lambda \approx 1 \cdot 10^{-35} \text{ sec}^{-2}; \quad R \approx 10^{24} \text{ m} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ pc}$$

Der extrem kleine Wert von Λ macht sich bei der Anwendung der erweiterten Gleichungen (2.10) innerhalb unseres Sonnensystems (Lichtablenkung an der Sonne oder Periheldrehung des Merkur) überhaupt nicht bemerkbar, erst in kosmologischen Skalen sorgt er für ein statisches Universum. Das Volumen solch einer Hypersphäre mit dem Krümmungsradius R ist gegeben durch die Beziehung $V = 2\pi^2 R^3$, womit wir die Gesamtmasse M solch eines geschlossenen statischen Universums angeben können:

$$M = \rho \cdot 2\pi^2 R^3 = 4\pi^2 \frac{R}{\kappa} = \frac{\sqrt{32\pi^2}}{\sqrt{\kappa^3 \rho}}$$

Setzen wir die oben berechneten Werte für ρ und κ ein, so erhalten wir für die Gesamtmasse des EINSTEINSchen Kosmos einen Wert von $M \approx 2 \cdot 10^{53} \text{ kg}$ oder 10^{23} Sonnenmassen.

Dieses EINSTEINSche kosmologische Modell konnte zwar die Expansion des Universums nicht erklären, sollte auch nicht, denn es war ja explizit für ein statisches Universum konstruiert. Viel schlimmer war, daß es instabil ist, wie SIR ARTHUR STANLEY EDDINGTON 1930 herausfand [9]. Es zeigte sich, daß eine kleine Vergrößerung des Krümmungsradius R diesen mit der Zeit immer größer werden läßt ohne Umkehr, entsprechendes gilt für eine Verkleinerung von R . Das EINSTEINSche Universum expandiert oder kollabiert demnach, wenn es gestört wird; Harrison ([24] S. 357) spricht deshalb davon, daß sich dieses Universum quasi auf der Schneide einer Rasierklinge befindet.

¹Dies läßt sich leicht nachvollziehen, indem man in (A.5a) auf Seite 150 zwei Koordinaten eliminiert; man erhält darauf hin die Gleichung eines Kreises $x^2 + y^2 = R^2$.

3.2 de Sitters kosmologisches Modell

Praktisch zeitgleich mit EINSTEINS „Kosmologischen Betrachtungen“ veröffentlichte WILLEM DE SITTER (1872–1934), ein niederländischer Astronom, seine Arbeit „On Einstein’s theory of gravitation and its astronomical consequences“ [58]. Er ging dabei von der Schwarzschildmetrik (2.15a) auf S. 49 aus und setzte $M = 0$ und

$$\Lambda = \frac{3}{R^2} \quad (3.3)$$

und erhielt so eine Metrik in der Form

$$ds^2 = -\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (3.4a)$$

und wenn, ähnlich wie bei der Metrik des EINSTEINSchen Kosmos in Kap. 3.1, $r = R \cdot \sin\xi$ gesetzt wird,

$$ds^2 = -\cos^2\xi c^2 dt^2 + [d\xi^2 + \sin^2\xi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)] \quad (3.4b)$$

Die Schwarzschildmetrik (2.15a) ist für den leeren Raum mit einer kugelsymmetrischen Masse m abgeleitet. Dadurch, daß $M = 0$ und damit letztlich entsprechend (2.15c) $m = 0$ gesetzt wird, enthält DE SITTERS Kosmos keinerlei Materie. Darüber hinaus unterscheidet er sich von dem EINSTEINSchen Kosmos, indem hier Lichtgeschwindigkeit c_{dS} abhängig von ξ , d.h. vom Ort ist:

$$c_{dS} = c \cdot \cos\xi \quad (3.4c)$$

Für $\xi = \frac{1}{2}\pi$ oder anders ausgedrückt, wenn $r = R$ ist, ist dann die Lichtgeschwindigkeit Null.

In Kap. 2.6 wurde gezeigt, daß aufgrund der Allgemeinen Relativitätstheorie Uhren in der Nähe gravitierender Massen langsamer gehen (EINSTEIN hatte das sogar schon 1911 vorausgesagt). In dem DE SITTERSchen passiert nun genau das Gegenteil: ohne Materie verlangsamen sich Uhren bis zum Stillstand.

Das Fehlen von Materie und die variable „Lichtgeschwindigkeit“ sind nicht die einzigen Merkwürdigkeiten des DE SITTER-Modells. Schon DE SITTER hatte selbst festgestellt, daß eine in das System (Kosmos) eingebrachte und sich selbst überlassene Masse sich nicht mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden (Geodäten) bewegt, vollkommen im Gegensatz zum Trägheitsgesetz. Weiterhin mußte er konstatieren, daß mehrere Partikel nicht in Ruhe bleiben können. Dazu konnte EDDINGTON 1925 berechnen, was mit diesen Körpern tatsächlich geschieht: sie streben mit einer Beschleunigung auseinander – die Zerstreuungstendenz. Mehrere eingebrachte Objekte zeigen also „eine allgemeine Tendenz zur Zerstreuung“, diese Eigenschaft wurde als „de Sitter-Effekt“ bezeichnet. EDDINGTON brachte dieses Phänomen in Zusammenhang mit den sich abzeichnenden astronomischen Beobachtungen der Rotverschiebung von Spiralnebeln, war aber unsicher für welches kosmologische Modell man sich letztendlich entscheiden sollte; die Tatsache, daß Massen im Universum vorhanden sind, spricht eher für das EINSTEINSche, die beobachtete

Rotverschiebung aber trotz Abwesenheit von Materie für DE SITTER.

EINSTEIN und DE SITTER standen in einem regen Briefwechsel über ihre Modelle, was später als „EINSTEIN-DE SITTER-Kontroverse“ in die Wissenschaftsgeschichte einging (siehe dazu z.B. [49]). Beide Modelle haben als frühe strenge Lösungen der EINSTEINSchen Feldgleichungen nur noch historische Bedeutung, gleichwohl trugen sie sehr viel zum mathematischen Verständnis der Allgemeinen Relativitätstheorie bei. Beide beruhten auf dem zur damaligen Zeit gängigen Weltbild eines statischen Universums, wobei man die treffende Unterscheidung machen kann: EINSTEINS Universum war „Materie ohne Bewegung“ und DE SITTERS Universum war „Bewegung ohne Materie“ ([24] S. 273). Später werden wir sehen, daß die beiden Modelle Spezialfälle der Robertson-Walker-Metrik sind.

3.3 Die Lösungen von Friedmann und Lemaître

Seit 1920 beschäftigte sich der russische Mathematiker ALEXANDER FRIEDMANN (1888–1925) sehr intensiv mit der Relativitätstheorie, hier insbesondere mit der Allgemeinen Relativitätstheorie und kosmologischen Problemstellungen (siehe dazu die Einführung von G. SINGER zu der Schrift von A. FRIEDMANN „Die Welt als Raum und Zeit“ [19]). Ergebnis seiner Arbeit zu diesem Thema war sein Artikel „Über die Krümmung des Raumes“, der 1922 in der Zeitschrift für Physik veröffentlicht wurde [18]. EINSTEIN war von dem Inhalt alles andere als angetan, er war sogar der Überzeugung, daß FRIEDMANN ein Rechenfehler bei der Lösung der Feldgleichungen unterlaufen sei. Friedmann hatte nämlich gefunden, daß ein Modell eines expandierenden Universums durchaus als Lösung in Frage kam, was natürlich EINSTEINS Vorstellung des statischen Universums zuwider lief; ein Jahr später zog er allerdings seine Kritik an der Arbeit wieder zurück.

Im Gegensatz zu EINSTEIN, der mit einer vorgefaßten Meinung eine Lösung seiner Feldgleichungen für ein statisches Universum suchte, ging FRIEDMANN, ganz Mathematiker, anders das Problem an: er suchte die (mathematisch) möglichen Lösungen der Feldgleichungen bei gegebenen kosmologischen Bedingungen. Diese waren, wie bei EINSTEIN, die „Inkohärenz“ der Materie (die Materie ist gleichmäßig im Raum verteilt und es herrscht kein Druck) und deren verschwindend kleine Geschwindigkeit gegenüber der Lichtgeschwindigkeit. In diesem Fall hat der Energie-Impuls-Tensor in den Feldgleichungen (2.10) eine besonders einfache Form. Er kann zeigen, daß mit der Metrik

$$ds^2 = M^2 dt^2 + R^2 \cdot (d\xi^2 + \sin^2 \xi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) \quad (3.5a)$$

die Feldgleichungen erfüllt sind; dabei hängt R alleine von der Zeit t und M im Allgemeinen von allen Koordinaten $(t, \xi, \vartheta, \varphi)$ ab. Die Größe R spielt dabei die Rolle des zeitlich veränderlichen Krümmungsradius. Setzt man nun in (3.5a) $M = -1$ und $R = \text{const}$ so erhält man daraus die EINSTEINSche Lösung eines statischen Universums, die „Zylinderwelt“. Das Modell DE SITTERS ergibt sich ebenfalls als Spezialfall, indem ebenfalls $R = \text{const}$ und $M = -\cos \xi$

gesetzt wird; es beschreibt ebenfalls ein statisches Universum, allerdings mit der Massendichte $\varrho = 0$.

Friedmann betrachtet darüber hinaus Lösungen für ein nichtstationäres Universum; dabei nimmt er an, daß sowohl R als auch M von der Zeit t abhängen. Ohne genauere Begründung behauptet er, „durch entsprechende Wahl von t kann man erreichen (ohne der Allgemeinheit der Betrachtung zu schaden), daß $M = 1$ wird“. Für die Metrik dieses kosmologischen Modelles erhält er die Gleichung

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2 \cdot (d\xi^2 + \sin^2 \xi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)). \quad (3.5b)$$

Die Gleichung (3.5b) ist hier nicht originalgetreu nach [18] wiedergegeben, sie ist vielmehr der in diesem Skript gewählten Vorzeichenkonvention angepaßt. Damit findet er Beziehungen für $R(t)$ und $\varrho(t)$ aus den Feldgleichungen, die in ihrer verallgemeinerten Form der heutigen Friedmann-Gleichungen (3.27) und (3.29) entsprechen (siehe Seite 85 und 87). Aus diesen Gleichungen leitet er eine Differentialgleichung für $R(t)$ ab und findet eine Lösung dafür in einer Gleichung für R in Abhängigkeit von t oder umgekehrt t in Abhängigkeit von R . Systematische Analyse dieser Zusammenhänge führt ihn auf drei unterschiedliche Verhaltensweisen seiner Lösung.

Monotone Welt erster Art, so nennt FRIEDMANN sein kosmologisches Modell bei dem die Konstante Λ größer als ein bestimmter positiver Wert Λ_1 ist (der Parameter Λ_1 hängt von der Gesamtmasse im Universum ab). In diesem Fall kann er zeigen, daß der Krümmungsradius R mit zunehmender Zeit immer weiter wächst. Anders herum, bei abnehmender Zeit, wird R immer kleiner und erreicht den Wert Null, da er ja nicht negativ werden kann. Wenn der Krümmungsradius zum heutigen Zeitpunkt mit R_0 bezeichnet wird, dann nennt FRIEDMANN die Zeit des Anwachsens von R von 0 bis R_0 „die Zeit seit Erschaffung der Welt“.

Monotone Welt zweiter Art liegt vor, wenn $(0 \leq \Lambda \leq \Lambda_1)$ gilt und der Krümmungsradius zum heutigen Zeitpunkt R_0 größer als ein minimaler Wert R_{min} ist. In diesem Fall ist R ebenfalls eine zunehmende Funktion der Zeit, der minimale Krümmungsradius ist aber nicht Null, sondern hat den endlichen Wert R_{min} (der Krümmungsradius kann nicht kleiner werden). Die Zeit, die seit dem Zeitpunkt, zu dem $R = R_{min}$ war, bis zu dem, wann $R = R_0$ ist, nennt er auch hier wieder „die Zeit seit Erschaffung der Welt“.

Periodische Welt nennt FRIEDMANN den Fall, in dem Λ in dem Intervall $(-\infty, \Lambda_1)$ liegt und der heutige Krümmungsradius R_0 kleiner als ein Wert R_{max} ist. Er kann dann zeigen, daß R eine periodische Funktion der Zeit wird, mit einer Periode t_π , die er „Weltperiode“ nennt. Der Krümmungsradius variiert zwischen 0 und R_{max} und die Periode nimmt mit wachsendem Λ zu und geht gegen Unendlich, wenn Λ gegen Λ_1 strebt.

Schon im Jahr 1922 hatte Alexander Friedmann demnach in seinem Artikel „Über die Krümmung des Raumes“ [18] die wesentlichen kosmologischen Modelle beschrieben, die erst Jahre später wieder diskutiert wurden. Seine Arbeit wurde aber zu dieser Zeit kaum beachtet, nicht zuletzt aufgrund der Ablehnung durch EINSTEIN und dadurch, daß er 37-jährig viel zu früh 1925 an einer Typhusinfektion starb. Späte Anerkennung fand er aber doch noch dadurch, daß die Metrik der kosmologischen Modelle mit seinem Namen verbunden ist.

Der katholische Priester Abbé GEORGES LEMAÎTRE (1894–1966) veröffentlichte 1927 in den *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* eine Arbeit mit dem Titel „Une univers homogène de masse constante et de rayons croissant“ [33], in der er sich mit den kosmologischen Modellen EINSTEINS und DE SITTERS auseinandersetzt. Durch die eher unbekanntere Zeitschrift und vielleicht auch aufgrund der Tatsache, daß der Text in Französisch verfaßt war, fand seine Arbeit praktische keine Aufmerksamkeit. Erst als 1931 eine Übersetzung, initiiert von EDDINGTON, in England erschien [34], wurde die Fachwelt auf ihn aufmerksam. Es muß allerdings bemerkt werden, daß in der Übersetzung von 1931 [34] auch Arbeiten von anderen Autoren zitiert werden, die nach der Originalarbeit 1927 veröffentlicht wurden. Außerdem werden darin auch die Ergebnisse von Hubble erwähnt, die sich auf die Fluchtgeschwindigkeit der Galaxien beziehen. Es liegt also hier eher eine Überarbeitung des ursprünglichen Artikels als eine reine Übersetzung vor.

LEMAÎTRE stellt in seinem Artikel fest, daß die Feldgleichungen für ein statisches Gravitationsfeld bei gleichmäßig verteilter Materie und ohne Druck nur zwei Lösungen haben: die EINSTEINSche und die von DE SITTER; letzteres Universum ist leer, ersteres beinhaltet Masse. Für LEMAÎTRE ist bemerkenswert, daß es kein Zwischending als Lösung zwischen beiden Extremen gibt. Er findet aber doch eine Lösung dieses Paradoxons, indem er zeigen kann, daß DE SITTERS Lösung nicht alle Anforderungen an eine korrekte Lösung der Feldgleichungen erfüllt.

Der Raum ist homogen mit einer konstanten Krümmung, so die Voraussetzungen in den beiden Fällen; die Raumzeit ist ebenfalls homogen und damit sind alle Ereignisse (Events) äquivalent. Die Aufteilung der Raumzeit in Raum und Zeit zerstört die Homogenität. Die von DE SITTER in seinem Modell genutzten Koordinaten setzen ein Zentrum voraus. Ein Objekt in Ruhe in diesem Zentrum des Raumes beschreibt eine Geodäte; ein Objekt aber irgendwohin anders im Raum positioniert, beschreibt keine Geodäte. Die so gewählten Koordinaten zerstören demnach die Homogenität des Raumes und resultieren in dem paradoxen Verhalten des Modells, daß die Lichtgeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle des DE SITTERSchen Raumes Null werden kann (siehe Kap. 3.2).

Eine Lösung findet LEMAÎTRE darin, daß er die Koordinaten so wählt, daß die Homogenität des Raumes gewahrt bleibt, das Feld ist aber nicht länger statisch; das Universum bekommt die gleiche Form wie das von EINSTEIN –

eine Hypersphäre –, der Krümmungsradius ist aber nicht länger mehr konstant. Er nutzt die Friedmann-Gleichungen (siehe oben), um das zeitliche Verhalten des Krümmungsradius $R(t)$ zu beschreiben. Damit kann er zeigen, daß die Rotverschiebung der Galaxien, wie sie HUBBLE gemessen hatte, eine direkte Folge der zeitlichen Veränderlichkeit des Krümmungsradius ist. Das in dem Artikel [34] als Schlußfolgerung präsentierte kosmologische Modell sagt aus:

- Die Masse des Universums ist konstant und ist durch die von EINSTEIN eingeführten kosmologischen Konstante Λ durch die Beziehung

$$\sqrt{\Lambda} = \frac{2\pi^2}{\kappa M}$$

definiert.

- Der Radius (heute genauer gesagt der Skalenfaktor) wächst ohne Grenze, beginnend mit einem asymptotischen Wert R_0 für $t \rightarrow -\infty$.
- Die Fluchtgeschwindigkeiten der Galaxien sind der kosmische Effekt der Expansion des Universums.

Dieses von LEMAÎTRE beschriebene kosmologische Modell wird in der Literatur auch als Eddington-Lemaître Universum bezeichnet, da Eddington wesentlich dazu beigetragen hat, daß die Gedanken LEMAÎTRES überhaupt bekannt wurden. Anerkennung findet heute LEMAÎTRE, genau wie auch FRIEDMANN, indem die heute generell genutzte Metrik in der Kosmologie unter anderem nach ihnen benannt ist: Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker Metrik, abgekürzt FLRW-Metrik.

3.4 Hubbles Entdeckung des expandierenden Universums

In den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts, als die beiden kosmologischen Modelle von EINSTEIN und DE SITTER kontrovers diskutiert wurden, herrschte unter Astronomen das Weltbild eines statischen unendlichen Universums vor; die Objekte, die man beobachtete – Sterne, Sternhaufen, Nebel etc. – befanden sich, abgesehen von geringen Pekuliarbewegungen, in Ruhe. Was die Nebel anbetrifft, so war man noch lange der Meinung, es handle sich nach der Kant-Laplaceschen-Theorie um primordiale Planetensysteme, also um in Entstehung begriffene Systeme. Auf diesem Weltbild basierten die Kosmologischen Modelle EINSTEINS und DE SITTERS, obwohl letzteres die peinliche Eigenschaft besaß, eine Zerstreuungstendenz zu zeigen (siehe Kap. 3.2).

Man hatte auch schon begonnen, die Nebel genauer zu untersuchen; 1913 stellte VESTO SLIPHER (1875–1969) am Lowell-Observatorium in Flagstaff (Arizona) fest, daß das beobachtete Spektrum von M31 – der Andromedanebel (die Andromeda-Galaxie) – eine signifikante Blauverschiebung zeigte und schloß daraus, daß er sich entsprechend des Doppler-Effektes mit einer Geschwindigkeit von 300 km/sec auf uns zu bewegt. Im Jahr 1914 veröffentlichte

er seine Entdeckung der Rotation an 14 weiteren Spiralnebeln; Dabei stellte er fest, daß sich einige von ihnen scheinbar auf uns zu bewegen, andere von uns weg. Mit seinen Entdeckungen lenkte er das Interesse der Astronomen auf die eingehendere Erforschung dieser Nebel.

EDWIN HUBBLE (1889–1953) konnte mit dem neuen 100-inch Teleskop des Mount-Wilson-Observatoriums zum ersten mal einen einzelnen Stern – einen Cepheiden, ein variabler Stern, – in M31 nachweisen. Das war für ihn der Beweis, daß der Andromedanebel kein nahes Planetensystem, das sich gerade bildet, sondern ein System wie unsere Milchstraße ist. Damit war das Kant-Laplacesche Weltbild nicht mehr haltbar. 1912 hatte HENRIETTA SWAN LEAVITT, eine amerikanische Astronomin, festgestellt, daß zwischen der (mittleren) absoluten Helligkeit oder Leuchtkraft der Cepheiden und deren Länge der Pulsationsperioden ein Zusammenhang besteht, die Perioden-Leuchtkraft-Beziehung, die man für Entfernungsbestimmungen nutzen kann, sog. Standardkerzen. Mit dieser Methode schätzte HUBBLE die Entfernung des Andromedanebels auf 1 Million Lichtjahre (heutiger Wert: 2,3 Mio. Lj).

Der schwedische Astronom KNUT EMIL LUNDMARK (1889–1958) publizierte 1924 ein Diagramm, in dem er die Geschwindigkeiten von 44 Galaxien gegen ihre Entfernung auftrug. Die Geschwindigkeit hatte er ebenfalls aufgrund des Doppler-Effektes bestimmt. Die Entfernung der Galaxien bestimmte er, indem er deren Durchmesser und Helligkeit ins Verhältnis zu denen des Andromedanebels setzte. Die Entfernung von M31 (Andromedanebel) hatte er aufgrund von Novae, deren Helligkeit er mit denen in der Milchstraße verglich, auf 650.000 Lichtjahre bestimmt. Er stellte einen Zusammenhang zwischen Rotverschiebung und Entfernung fest, aber „...not a very definite one“.

Den endgültigen Nachweis eines Zusammenhanges zwischen Fluchtgeschwindigkeit und Entfernung extragalaktischer Nebel erbrachte HUBBLE 1929 in seiner Veröffentlichung „A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae“ [25]². Er ging auch hier wieder von einer Entfernung zu M31 von 1 Million Lichtjahren aus. In der Abb. 3.3 sind seine Beobachtungen in einem Diagramm Geschwindigkeit gegen Entfernung eingetragen. Bei nahen Galaxien treten durchaus Bewegungen von Galaxien auf uns zu auf, erkenntlich an den negativen Geschwindigkeiten, für weiter entfernte beobachtet man tendenziell positive Geschwindigkeiten, als Bewegungen radial von uns weg. Die durchgezogene Linie in dem Diagramm zeigt den (mathematischen) Trend dieser Fluchtgeschwindigkeiten an, wobei man aus den Datenpunkten einen Korrelationskoeffizienten von 0,84 errechnen kann. HUBBLE selbst nutzte als Trendlinie die gestrichelte Gerade und schloß damit (etwas gewagt) auf einen linearen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Entfernung. Die Geschwindigkeit der Galaxien errechnete er aus der Rotverschiebung z entsprechend dem klassischen Doppler-Effekt

$$v = c \cdot z \quad \text{mit} \quad z = \frac{\lambda_B - \lambda_0}{\lambda_0}.$$

²„Radial“ meint hier, daß sich alle Nebel radial von uns weg bewegen.

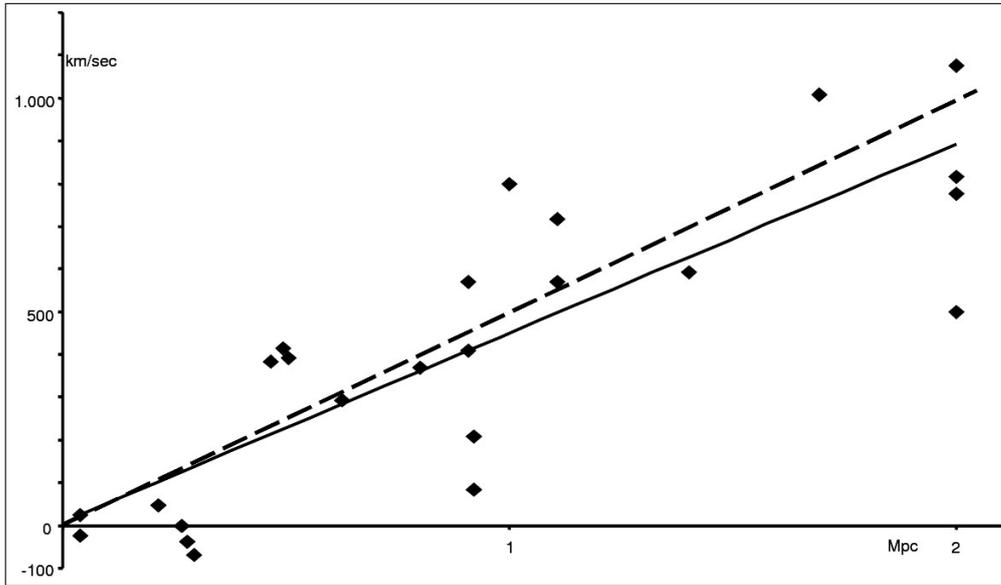


Abbildung 3.3: HUBBLES Meßwerte aus [25] in einem Geschwindigkeit/Entfernungs-Diagramm. Die durchgezogene Linie ist der mathematische Trend mit einem Korrelationskoeffizienten von 0,84. HUBBLE selbst nutzte die gestrichelte Linie, um die nach ihm benannte Konstante und Gesetz festzulegen.

Dabei ist λ_B die an der Galaxie gemessene Wellenlänge einer bestimmten Spektrallinie und λ_0 die entsprechende im Labor auf der Erde gemessene. Er leitete demnach aus seinen Beobachtungen den Zusammenhang

$$c \cdot z = \text{Konstante} \times \text{Entfernung}.$$

Die Konstante – ihm zu Ehren als Hubble-Konstante H_0 bezeichnet – bestimmte er zu

$$H_0 = 500 \text{ km/sec pro Mpc} \equiv 150 \text{ km/sec pro } 10^6 \text{ Lj.} \quad (3.6a)$$

Der lineare Zusammenhang zwischen Rotverschiebung z und Entfernung L ist das von Astronomen genutzte *Hubblesche Gesetz*:

$$c \cdot z = H_0 \cdot L. \quad (3.6b)$$

1952 entdeckte WALTER BAADE die Sternpopulationen, womit sofort klar wurde, daß es auch unterschiedliche Cepheiden mit verschiedenen Perioden-Leuchtkraft-Beziehungen gibt. Das hies, die Hubble-Konstante muß neu bestimmt werden. In der Folge mußte das mehrmals geschehen, denn die Unsicherheit in H_0 resultiert aus der problematischen Entfernungsbestimmung; so geben unterschiedliche Beobachter verschiedene Werte für H_0 an (aus [30] S.

587):

$$\begin{aligned}
 H_0 &\approx 500 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} && (\text{HUBBLE 1929}) \\
 &\approx 100 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} && (\text{BAADE und SWOPE 1955}) \\
 &= 98 \pm 15 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} && (\text{SANDAGE 1962}) \\
 &\lesssim 75 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} && (\text{SANDAGE 1968}) \\
 &\approx 50 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} && (\text{SANDAGE 1971})
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Der heute genaueste Wert der Hubble-Konstanten aus Beobachtungen mit Supernovae vom Typ 1a [50] wird mit

$$H_0 = 73,8 \pm 2,4 \frac{\text{km}}{\text{sec} \cdot \text{Mpc}} \tag{3.8}$$

angegeben³. Wir werden in der Folge sehen, daß sie in praktisch allen Formeln der kosmologischen Modellen auftaucht. Häufig sieht man in der Literatur für H_0 die Form

$$H_0 = 100 \cdot h \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

mit $0,5 \leq h \leq 1,0$, womit man die unterschiedlichen Werte von H_0 zu berücksichtigen sucht. Für andere Berechnungen ist es sinnvoll die Hubble-Konstante auch in anderen Dimensionen zur Verfügung zu haben:

$$H_0 = 100 \cdot h \frac{\text{km}}{\text{sec} \cdot \text{Mpc}} \approx 1,02 \cdot 10^{-10} \cdot h \frac{1}{\text{Jahr}} \approx 3,23 \cdot 10^{-18} \cdot h \frac{1}{\text{sec}} \tag{3.9}$$

Obgleich HUBBLE in seinem Artikel [25] aus dem Jahr 1929 von einem Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit der Galaxien und ihrer Entfernung sprach, war er doch skeptisch, ob die Interpretation der Rotverschiebung als Folge einer Geschwindigkeit in diesem Fall angebracht war; in seinem 1936 erschienenen Buch „*The realm of the Nebulae*“ brachte er das deutlich zum Ausdruck. Zweifel kamen auf, als man immer entferntere Galaxien beobachten konnte und feststellte, daß der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit – berechnet nach der Formel $v = c \cdot z$ – und Entfernung immer linear blieb; wäre v tatsächlich eine Geschwindigkeit im klassischen oder im Sinne der Speziellen Relativitätstheorie, so dürfte der lineare Zusammenhang nur für Geschwindigkeiten $v < 0,01c = 3000 \text{ km/sec}$ (entsprechend einem $z < 0,01$) gelten. Für größere Geschwindigkeiten führt die relativistische Formel des Doppler-Effektes (siehe z.B. [20])

$$v = c \cdot \frac{(z + 1)^2 - 1}{(z + 1)^2 + 1} \tag{3.10}$$

zu dem Grenzwert der Lichtgeschwindigkeit für große Werte von z , wie in Abb. 3.4 dargestellt. Die physikalisch korrekte Abhängigkeit der Fluchtgeschwindigkeit von der Rotverschiebung liefert erst die Allgemeine Relativitätstheorie; für zwei kosmologische Modelle – das Modell des Einstein-de Sitter Universums und das Λ CDM-Modell – ist der Kurvenverlauf in Abb. 3.4 abgebildet (die

³Neueste Analysen der Hintergrundstrahlung aus Messungen mit dem Satelliten PLANCK [2] ergeben einen niedrigeren Wert; siehe dazu Kap. 4.1.

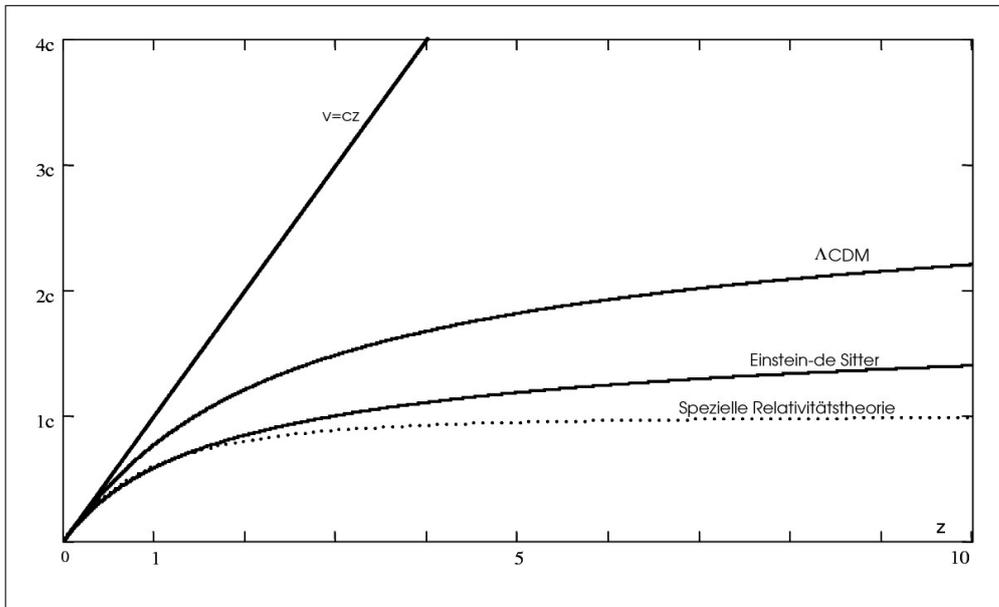


Abbildung 3.4: Abhängigkeit der Fluchtgeschwindigkeit von der Rotverschiebung z ; der lineare Zusammenhang gilt nur für sehr kleine Werte von z . Die Berücksichtigung der Speziellen Relativitätstheorie führt zu dem Grenzwert c . Korrekterweise muß man mit kosmologischen Modellen rechnen, für zwei solcher Modelle – Λ CDM-Modell und Einstein-de Sitter Modell – sind die Kurvenverläufe dargestellt.

Berechnung der Beziehung zwischen z und der Fluchtgeschwindigkeit für die verschiedenen Modelle wird in Kap. 3.10 behandelt).

Seit etwa 1930 hatte sich langsam unter Astronomen und theoretisch arbeitenden Kosmologen die Überzeugung durchgesetzt, daß die beobachtete Rotverschiebung und die daraus nach der Formel (3.6b) berechnete Geschwindigkeit v eine Folge des expandierenden Raumes war. Theoretische (leider wenig beachtete) Vorleistungen hatten ja bereits FRIEDMANN und LEMAÎTRE erbracht und selbst EINSTEIN ließ sich 1930 bei einem Besuch bei HUBBLE auf dem Mount-Wilson-Observatorium von seiner Vorstellung eines statischen Universums abbringen. Mitte der 1930-er Jahre hatte sich das Paradigma des expandierenden Universums allgemein durchgesetzt. Eine endgültige Entscheidung können natürlich nur astronomische Beobachtungsdaten erbringen und die sprechen eindeutig, wie wir in Kap. 4.1 sehen werden, gegen die Interpretation, daß die kosmologische Rotverschiebung durch den relativistischen Doppler-Effekt verursacht wird.

HOWARD PERCY ROBERTSON (1903–1961), ein amerikanischer Mathematiker und Physiker, formulierte, basierend auf den Beobachtungen von HUBBLE und natürlich auch anderen, zur Beschreibung eines expandierenden Universums das allgemeine *Geschwindigkeits-Entfernungs-Gesetz*

$$V(t) = H(t) \cdot L(t). \quad (3.11)$$

Die Hubble-Funktion $H(t)$ ist in diesem Gesetz nun keine Konstante mehr,

sondern ist abhängig von der Zeit t ; der Wert der Hubble-Funktion zur gegenwärtigen Zeit t_0 ist dann die Hubble-Konstante H_0 , die dazu entsprechende Entfernung L_p ist der Eigenabstand (engl. proper distance) zum heutigen Zeitpunkt zwischen uns und der beobachteten Galaxie; die Bedeutung von L_p wird im nächsten Kapitel deutlich werden.

3.5 Expandierender Raum

Der expandierende Raum wird häufig am Beispiel eines Hefeteigs mit Rosinen oder anhand eines Luftballons, auf dem wahllos Konfettiblättchen aufgeklebt sind, anschaulich gemacht. Wenn der Hefeteig aufgeht, vergrößert sich das Volumen, die Rosinen aber bleiben an ihrem Ort, nur ihre gegenseitigen Abstände vergrößern sich. Diese Vergrößerung des gegenseitigen Abstandes gilt gleichermaßen von jeder Rosine aus gesehen; keine ist irgendwie bevorzugt.

Die Oberfläche des Luftballons als Beispiel stellt nun einen zweidimensionalen Raum dar; wird er aufgeblasen, vergrößert sich ebenfalls der gegenseitige Abstand der Konfettiblättchen. Auch hier gilt, daß die Vergrößerung des Abstandes zwischen den Blättchen von jedem aus gesehen gleichartig ist; es gibt keine bevorzugte Stelle auf der Kugeloberfläche, die als Ausgangspunkt der Expansion angesehen werden könnte.

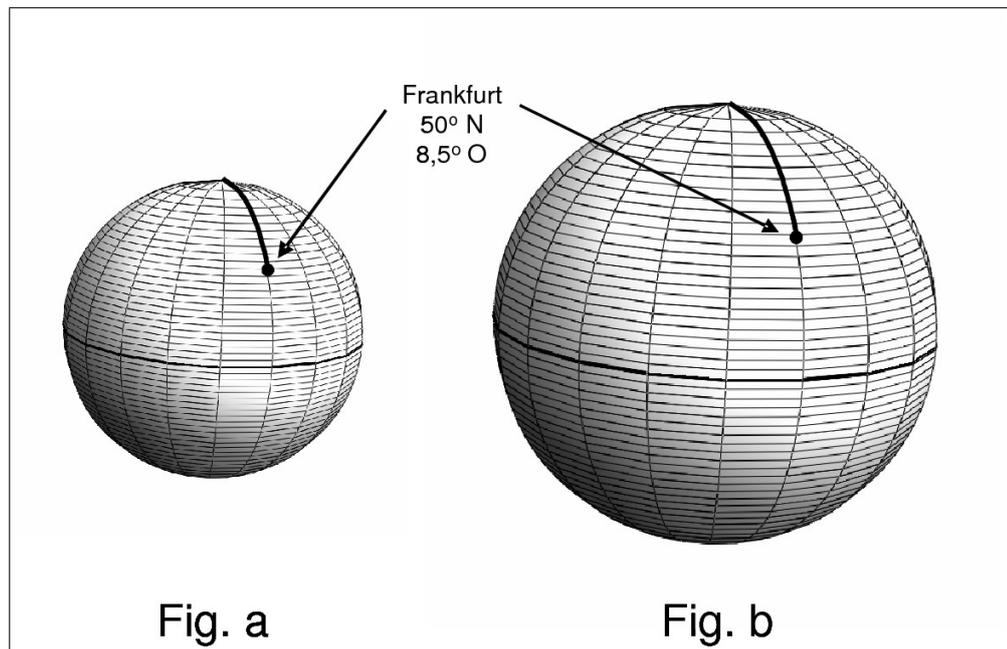


Abbildung 3.5: Zur Expansion des Raumes; Erläuterung im Text.

Um die Expansion des Raumes auch quantitativ zu beschreiben, bleiben wir bei dem Beispiel der Kugeloberfläche als zweidimensionaler Raum. Wir stellen uns dazu einen aufblasbaren Globus mit einem Radius von $r_{10} = 10$ cm vor, wie er in Abb. 3.5 dargestellt ist; r_{10} können wir als Krümmungs-

radius unseres zweidimensionalen gekrümmten (nicht-Euklidischen) Raumes auffassen. Das Koordinatensystem, mit dem Orte im Raum beschrieben werden, sei das uns gewohnte System von Längen- und Breitengrade. So ist der Ort von Frankfurt (50° Nord und $8,5^\circ$ Ost) der schwarze Punkt auf dem Globus von Fig. a der Abb. 3.5. Der (kürzeste) Abstand zweier Punkte im Raum ist gegeben durch die Länge der Geodäte, die die beiden Punkte miteinander verbindet; auf unserer Kugeloberfläche ist die Geodäte der Großkreis. Wir vereinfachen unser Beispiel und nehmen an, daß wir die Entfernung zwischen dem Ort „Frankfurt“ und dem „Nordpol“ auf dem Globus der Fig. a bestimmen; in diesem Beispiel bleibt der Längengrad gleich, nur der Breitengrad ändert sich. Diese Strecke ist der schwarze Bogen auf dem Globus der Fig. a in Abb. 3.5. Die Länge dieser Strecke sei mit l_{10} bezeichnet und ist gegeben durch

$$l_{10} = r_{10} \cdot \text{Breitendifferenz} \quad (3.12a)$$

und mit konkreten Zahlen:

$$l_{10} = r_{10} \cdot \frac{2\pi(90^\circ - 50^\circ)}{360^\circ} \approx 7 \text{ cm.} \quad (3.12b)$$

Blasen wir nun den Globus soweit auf, daß er den dreifachen Radius $r_{30} = 30$ cm hat (Fig. b in der Abb. 3.5), dann gilt für die Entfernung l_{30} zwischen „Frankfurt“ und „Nordpol“ die gleiche Formel wie (3.12a). Die Breitendifferenz bleibt gleich, allein der Radius des Globus hat sich geändert:

$$l_{30} = r_{30} \cdot \frac{2\pi(90^\circ - 50^\circ)}{360^\circ} \approx 21 \text{ cm.} \quad (3.12c)$$

Verallgemeinern wir das bisher gefundene, so können wir für die Entfernung zwischen zwei Punkten in unserem zweidimensionalen Raum schreiben:

$$l = r \cdot \text{Koordinatendistanz(Länge, Breite)}, \quad (3.12d)$$

denn der kürzeste Abstand wird entlang der Geodäten bestimmt.

Verallgemeinern wir (3.12d) auf einen beliebigen Raum und bezeichnen mit $a(t)$ den Skalenfaktor, um den sich der Raum vergrößern oder verkleinern kann, dann ist die kürzeste Entfernung L zwischen zwei Punkten in dem Raum gegeben durch

$$L(t) = a(t) \cdot \text{Koordinatendistanz.} \quad (3.13a)$$

Dieses Gesetz wird auch gelten, wenn wir astronomische Entfernungen bestimmen. Sie werden ja aus der Information berechnet, die uns das Licht entfernter kosmischer Objekte liefert; im letzten Kapitel hatten wir das Beispiel der Entfernungsbestimmung mit Hilfe der veränderlichen Intensität der Cepheiden besprochen. Da das Licht sich entlang von Geodäten bewegt, muß für die daraus abgeleitete Entfernung die Formel (3.13a) angewandt werden. Der Skalenfaktor hängt im Allgemeinen von der Zeit ab, wie wir schon an unserem einfachen Beispiel beim Aufblasen des Globus gesehen haben; damit ist auch die Entfernung zwischen zwei Punkten zeitabhängig. Die Rate, mit der

sich die Entfernung $L(t)$ mit der Zeit ändert, können wir als Fluchtgeschwindigkeit $V(t)$ interpretieren. Wir erhalten sie, indem wir (3.13a) nach der Zeit differenzieren (die Koordinatendistanz hängt nicht von der Zeit ab):

$$V(t) = \frac{dL(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \cdot \text{Koordinatendistanz}. \quad (3.13b)$$

Setzen wir die Koordinatendistanz aus (3.13a) in (3.13b) ein, so erhalten wir für $V(t)$

$$V(t) = L(t) \cdot \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.13c)$$

wobei \dot{a} die Ableitung von a nach der Zeit ist. Definieren wir

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (3.14a)$$

als Hubble-Funktion (im Englischen auch als Hubble term bezeichnet), so erhalten wir aus (3.13c) das Geschwindigkeits-Entfernungs-Gesetz:

$$V(t) = H(t) \cdot L(t). \quad (3.14b)$$

Offensichtlich wird die Fluchtgeschwindigkeit V mit wachsendem L immer größer und erreicht schließlich die Lichtgeschwindigkeit c ; die Entfernung, bei der das eintritt, ist die Hubble-Länge L_H

$$L_H(t) = \frac{c}{H(t)}. \quad (3.14c)$$

Sie hängt ebenfalls von der Zeit ab, d.h. sie vergrößert sich in einem expandierenden Universum permanent. Zum heutigen Zeitpunkt t_0 errechnet sie sich mit dem Wert der Hubble-Konstanten H_0 aus (3.8) zu

$$L_H^{(\text{heute})} = \frac{c}{H_0} \approx 4.200 \text{ Mpc}. \quad (3.14d)$$

Jenseits der Hubble-Länge wird die Fluchtgeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit. Diese Überlichtgeschwindigkeit ist aber kein Verstoß gegen die Relativitätstheorie, denn es expandiert der Raum; die darin befindlichen Objekte – Galaxien – ruhen in dem Raum oder führen nur kleine Pekuliargeschwindigkeiten ihm gegenüber aus. Das Raumgebiet mit dem Radius der Hubble-Länge L_H wird als Hubble-Sphäre bezeichnet; ihre Größe ist auch von der Zeit abhängig und expandiert zusammen mit der Expansion des Raumes.

Der Skalenfaktor zur heutigen Zeit a_0 ist nicht so interessant, vielmehr interessiert sein Wert im Vergleich zu dem verschiedener zeitlicher Zustände des Universums $a(t)$. Nehmen wir an, L_0 sei der Abstand zweier Punkte in dem expandierenden Universum zum gegenwärtigen Zeitpunkt, dann gilt nach (3.13a):

$$L_0 = a_0 \cdot \text{Koordinatendistanz}$$

und zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt gilt dann entsprechend

$$L(t) = a(t) \cdot \text{Koordinatendistanz}.$$

Da die Koordinatendistanz sich nicht ändert, sondern nur der Skalenfaktor, ergibt sich

$$\frac{L(t)}{L_0} = \frac{a(t)}{a_0}. \quad (3.15a)$$

Das bedeutet, verdoppelt sich die Größe des Universums, dann verdoppeln sich auch die Abstände zweier (ruhender) Punkte. Analog gilt natürlich auch, daß sich der Abstand halbiert, wenn sich die Größe des Universums halbiert. Die gleiche Argumentation können wir auf eine Fläche F und ein Volumenelement U in dem expandierenden Raum anwenden und erhalten für die Fläche

$$\frac{F(t)}{F_0} = \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^2 \quad (3.15b)$$

und für das Volumenelement U den Ausdruck

$$\frac{U(t)}{U_0} = \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^3. \quad (3.15c)$$

Nehmen wir an, das Volumenelement U enthalte N Teilchen, wobei sie über die Zeit weder vernichtet noch neu erzeugt werden. Die Teilchendichte n ist dann definitionsgemäß die Anzahl der Teilchen pro Kubikmeter: $n = N/U$. Die Teilchendichte zum jetzigen Zeitpunkt ist dann entsprechend $n_0 = N/U_0$. Mit (3.15c) läßt sich dann die Dichte zu einem beliebigen anderen Zeitpunkt bestimmen:

$$n(t) = n_0 \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3. \quad (3.15d)$$

Betrachten wir das letzte Ergebnis am Beispiel konkreter Zahlen. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt nimmt man an, daß die mittlere Teilchendichte im Universum 1 Wasserstoffatom pro Kubikmeter beträgt. Als in der Vergangenheit der Skalenfaktor nur 1 % des gegenwärtigen Wertes betrug, muß die Dichte nach (3.15d) 10^6 mal höher gewesen sein, also 1 Wasserstoffatom pro Kubikzentimeter. Das aber ist die typische mittlere Dichte innerhalb einer Galaxie. Das bedeutet, daß zu diesem früheren Zeitpunkt im Universum keine einzelnen Galaxien unterscheidbar gewesen sein können; sie mußten sich demnach erst später gebildet haben.

Es ist wichtig zu betonen, daß die Aussage „das Universum ändert seine Größe“ nicht heißt, daß das Universum endlich ist, es bedeutet nur, daß sich der Skalenfaktor ändert! Auf einen weiteren Punkt muß noch hingewiesen werden. Durch die obigen Formeln, die eine Vergrößerung des Abstandes, der Fläche oder des Volumens beschreiben, könnte der Eindruck entstehen, daß sich dann die Objekte im Universum, angefangen von den Atomen über Sterne, Galaxien bis zu Galaxienhaufen, ebenfalls entsprechend vergrößern müßten. Das ist aber keineswegs der Fall, denn Objekte, die durch Kräfte aneinander gebunden sind – Atomkerne durch Kernkräfte, Atome durch die Coulombkraft und astronomische Objekte durch die Gravitation – nehmen nicht an der Expansion teil; als Faustregel kann man sich merken, solange die Bindungskräfte größer sind als die Kraft, die durch die Expansion des Raumes hervorgerufen

wird, werden die Objekte durch sie nicht in ihrer inneren Struktur beeinflußt.

Der Astronom, der sein Teleskop zur Beobachtung ausrichtet, blickt in den Raum, aber auch in die Vergangenheit, nicht in die Vergangenheit eines statischen, sondern eines expandierenden Universums. In der Abb. 3.1 auf Seite

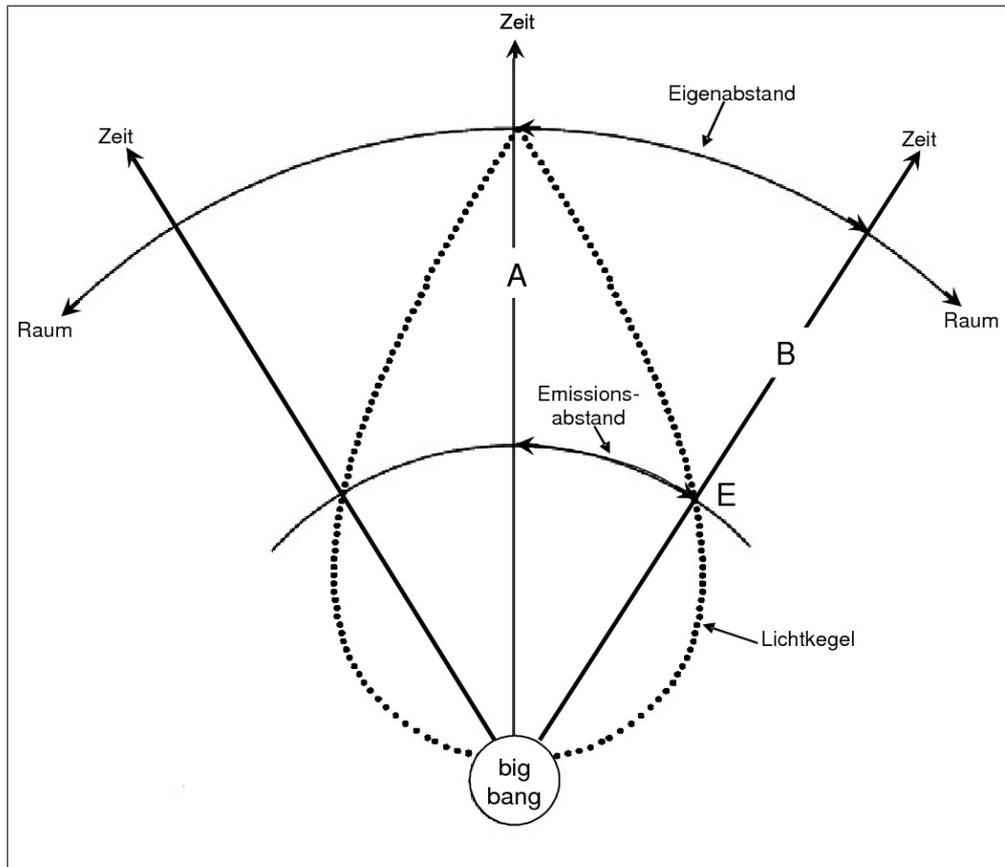


Abbildung 3.6: Schematisches Raum-Zeit-Diagramm eines expandierenden Raumes; *A* ist der Zeit-Pfeil des ruhenden Beobachters, *B* der einer (ebenfalls im Raum ruhenden) Galaxie. Der Eigenabstand ist die Entfernung zu dieser Galaxie zum heutigen Zeitpunkt. Der Emissionsabstand ist der Abstand, den die Galaxie hatte, als ihr Licht ausgesandt wurde, das uns jetzt entlang des Rückwärtslichtkegels (gepunktete Kurve) erreicht.

57 wurde gezeigt, welche Objekte aus der Vergangenheit in einem statischen Universum heute sichtbar sind und welche nicht. In einem expandierenden Universum sind die Verhältnisse wesentlich komplizierter, wie am Beispiel der Abb. 3.6 deutlich gemacht werden soll. Dabei legen wir wieder der Einfachheit halber den zweidimensionalen Raum einer Kugeloberfläche zugrunde; da wir aber ein Raum-Zeit-Diagramm konstruieren wollen, würde die zusätzliche Dimension der Zeit graphische Probleme bereiten. Deshalb betrachten wir nur einen Schnitt durch unsere Kugel entlang eines Großkreises. Der Raum vergrößert sich kontinuierlich, beginnend aus einem Zustand „big bang“ oder Urknall genannt. Daß der Raum von diesem Punkt aus seinen Anfang nimmt, soll nicht heißen, daß er von einem ganz bestimmten Punkt im Raum be-

ginnt, sondern er selbst, der Raum beginnt! Die beiden Kreisabschnitte in der Abb. 3.6 bezeichnen den Raum zu zwei verschiedenen Zeitpunkten. Der mit A bezeichnete Zeit-Pfeil sei die Weltlinie des (ruhenden) Beobachters, der mit B bezeichnete Zeit-Pfeil ist die einer entfernten (ebenfalls ruhenden) Galaxie. Spiegelbildlich ist die Weltlinie einer weiteren Galaxie dargestellt. Wie deutlich in der Abbildung zu sehen ist, wird der Abstand zwischen Beobachter und Galaxie mit fortschreitender Zeit immer größer; in unserem Fall hier fällt ausnahmsweise der Krümmungsradius unseres zweidimensionalen Raumes mit dem Skalenfaktor zusammen und so wird mit größerem Radius auch der Raum größer. Der Rückwärtslichtkegel, das heißt, das Licht, das wir zum jetzigen Zeitpunkt empfangen, hat nicht die einfache Dreiecksform wie in einem statischen Universum der Abb. 3.1, sondern diese tropfenförmige, wie durch die gepunktete Kurve in Abb. 3.6, dargestellt. Die Form ist ein Ergebnis der Expansion. Das Licht der Galaxie B , das den Beobachter zum jetzigen Zeitpunkt erreicht, wurde ausgesandt, als die Galaxie gerade den Emissionsabstand von uns hatte. Die jetzige Entfernung zwischen Beobachter und Galaxie ist der Eigenabstand L_p (zur Erinnerung: der Abstand wird entlang der Geodäten gemessen, in diesem Fall entlang des Kreisabschnittes).

Wir haben bis jetzt nur davon gesprochen, daß unser zweidimensionaler Raum expandiert, aber nicht, mit welcher Rate, d.h. mit welchem Wert von \dot{a} ; expandiert er gleichmäßig oder erst schnell und dann langsam oder gar beschleunigt. Diese Tatsache wird sich in der Skalierung des Zeit-Pfeiles in dem Raum-Zeit-Diagramm niederschlagen. Diese Thematik, die Änderung des Skalenfaktors mit der Zeit, wird Gegenstand der nächsten Kapitel sein, wenn wir genauer die einzelnen kosmologischen Modelle betrachten.

Wie aber kommt nun die etwas merkwürdige Form des Rückwärtslichtkegels zustande? Das können wir uns klarmachen, wenn wir uns erinnern, daß in einem Raum-Zeit-Diagramm Ereignisse (Events) dargestellt werden. Das Ereignis „Aussenden des Lichtes der Galaxie B , das uns zum jetzigen Zeitpunkt erreicht,“ ist der Schnittpunkt der Weltlinie der Galaxie B und unserem Rückwärtslichtkegel, der Punkt E in der Abb. 3.6. Weiterhin haben wir mit unserem zweidimensionalen expandierenden Raum zwar eine einfache aber immerhin eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit vor uns (siehe Kap. 2.3) und in solch einer Mannigfaltigkeit existiert in jedem Punkt ein lokales Inertialsystem, in dem die Spezielle Relativitätstheorie Gültigkeit hat. Macht sich nun das Licht zu der Zeit an dem Ort E „auf den Weg zu uns“, so bildet die Weltlinie des Lichtes in diesem Punkt (Event) einen Winkel von 45° gegen den Zeit-Pfeil von B in Richtung der Weltlinie A . Nach kurzer Strecke hat die Weltlinie des Lichtes nicht mehr 45° gegen den nun geltenden Zeit-Pfeil, da sich der Raum inzwischen ausgedehnt hat und sich die Richtung des Zeit-Pfeils gedreht hat. Das Licht folgt weiterhin der Geodäten und muß daher wieder den Winkel von 45° gegen den momentanen Zeit-Pfeil einstellen; ein ähnlicher Vorgang, wie wir ihn in Kap. 2.3 zur Erläuterung der Geodäte auf einer Kugeloberfläche beschrieben haben. Zusätzlich zu dort dehnt sich aber die Kugel kontinuierlich aus.

3.6 Robertson-Walker Metrik und Kosmokinematik

Im letzten Kapitel wurde der expandierende Raum eher qualitativ betrachtet, nun wollen wir die Möglichkeit untersuchen, Längenangaben oder genauer Entfernungen in einem gekrümmten expandierenden Raum rechnerisch zu bestimmen. Um die Sache möglichst anschaulich zu machen, bleiben wir zunächst bei dem Beispiel einer expandierenden Kugeloberfläche als Repräsentant eines positiv gekrümmten Raumes. Für den Raum legen wir das kosmologische Prin-

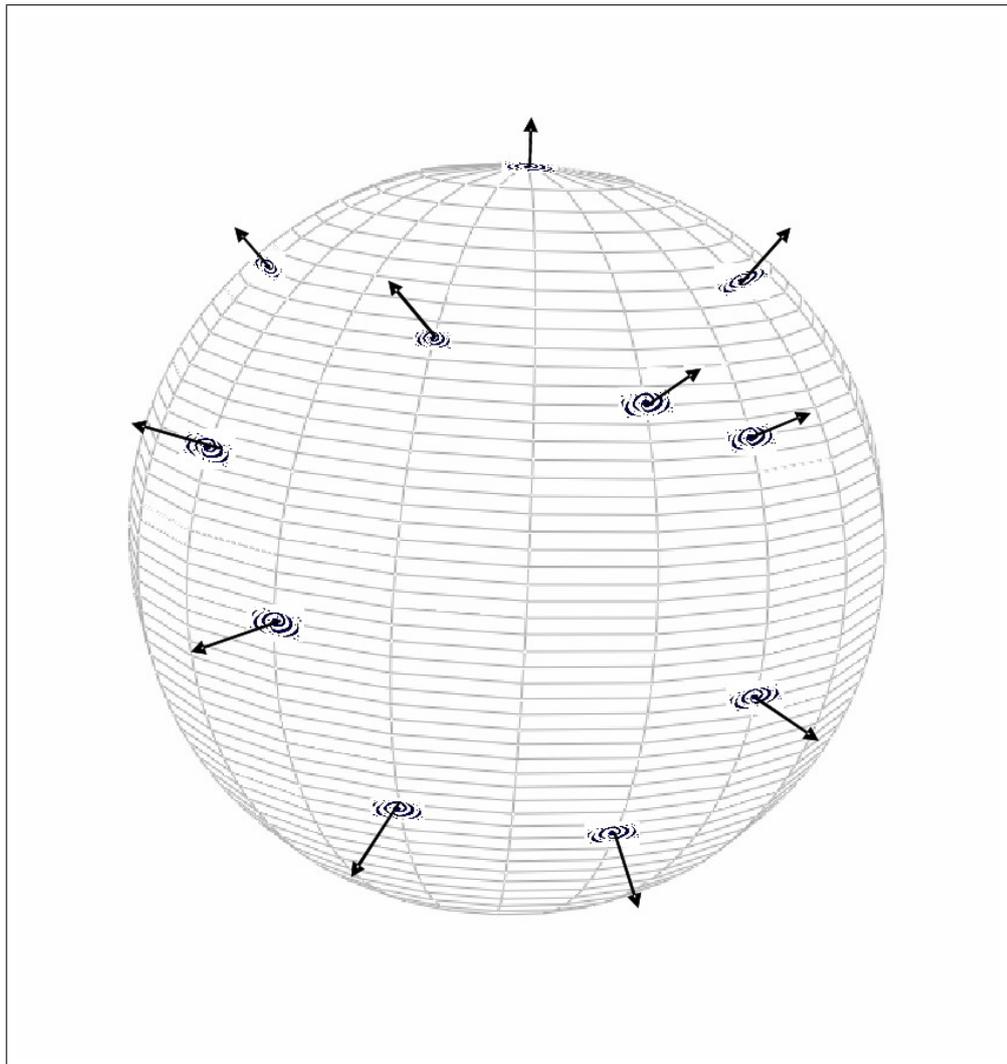


Abbildung 3.7: Schematisches Raum-Zeit-Diagramm eines zweidimensionalen gekrümmten und expandierenden Raumes. Die Zeitkoordinate, durch die Pfeile dargestellt, steht senkrecht auf der Kugeloberfläche in der in jedem Punkt die gleiche Zeit gilt.

zip zugrunde, daß der Raum homogen und isotrop ist. Die Abb. 3.7 stelle solch einen Raum dar, in dem die Materie im Mittel gleichmäßig verteilt sein soll und der Blick von einer beliebigen Galaxie in beliebiger Richtung in den Raum

zeigt einem Flächenwesen immer den gleichen Anblick; die Richtung der Beobachtung eines Flächenwesens auf der Kugeloberfläche ist natürlich entlang eines Großkreises innerhalb der Fläche. Es gibt auch keine hervorgehobene Position in diesem Raum (Kopernikanisches Prinzip). Die Objekte in dem Raum – in der Abb. 3.7 sind beispielhaft ein paar wenige Galaxien dargestellt – befinden sich in Ruhe, d.h. ihre Koordinaten, Länge und Breite, bleiben bei der Expansion konstant: es sind die *mitbewegten Koordinaten*. Die Expansion des Raumes erfolgt in jede Richtung gleichartig, so daß wir sagen können, daß die Zeit-Koordinate in jedem Punkt unserer Kugeloberfläche senkrecht steht, und außerdem gilt zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 überall auf der Kugeloberfläche diese Zeit.

Wenn es nun konkret um Maßbestimmungen geht, kommt die Metrik ins Spiel. Im Anhang A.1 wird das Bogenelement $d\sigma$ für eine zweidimensionale Kugeloberfläche in (A.2b) hergeleitet:

$$d\sigma^2 = R^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (3.16a)$$

mit ϑ als Winkel vom Pol aus gerechnet und φ als Länge von einem beliebigen Längengrad aus gemessen. Die Expansion (oder gleichermaßen die Kontraktion) dieses zweidimensionalen Raumes ist äquivalent zur Vergrößerung (oder Verkleinerung) des Radius R der Kugel. Da der Raum als *räumlich* homogen und isotrop angenommen wird, wird der Skalenfaktor $a(t)$ – der Radius R der Kugel – nur von der Zeit abhängen. Wenn diese Kugeloberfläche expandiert (oder kontrahiert) bleiben die Koordinaten ϑ und φ konstant, daher der Name „mitbewegte Koordinaten“.

Da jeder Punkt auf unserer Kugeloberfläche gleichberechtigt ist, können wir das Koordinatensystem so legen, daß sein „Nordpol“ mit der Position des Beobachters zusammenfällt. Die Abb. 3.8 zeigt das beispielhaft. Zusätzlich bezeichnen wir nun den Winkel ϑ , den die Position des Beobachters mit beispielsweise dem sternförmigen Objekt einschließt, mit r – die Koordinatendistanz. Der Winkel φ ist wieder der Längengrad, z.B. von dem in Abb. 3.8 stark gezeichneten Längengrad aus gemessen. Die Formel (3.16a) schreibt sich, wenn wir zusätzlich die Zeitabhängigkeit einbringen

$$d\sigma^2(t, r, \varphi) = a^2(t)(dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2) \quad (3.16b)$$

Die (kürzeste) metrische Entfernung $L(t)$ eines beliebigen Objektes vom Beobachter (= Koordinatenursprung) ergibt sich dann sofort aus (3.16b), wenn wir berücksichtigen, daß φ konstant und daher $d\varphi = 0$ ist, zu

$$L(t) = \int_0^r d\sigma = a(t) \cdot \int_0^r dr = a(t) \cdot r.$$

Demnach gilt das uns schon bekannte Gesetz

$$\text{metrische Entfernung} = \text{Skalenfaktor} \cdot \text{Koordinatendistanz},$$

das wir bereits im letzten Kapitel abgeleitet hatten. $L(t)$ entspricht dem ebenfalls dort beschriebenen Eigenabstand L_p . Bis jetzt konnten wir noch die Formeln zu dem Bogenelement graphisch veranschaulichen, wenn wir im Folgenden auf einen gekrümmten dreidimensionalen Raum übergehen, wird uns das

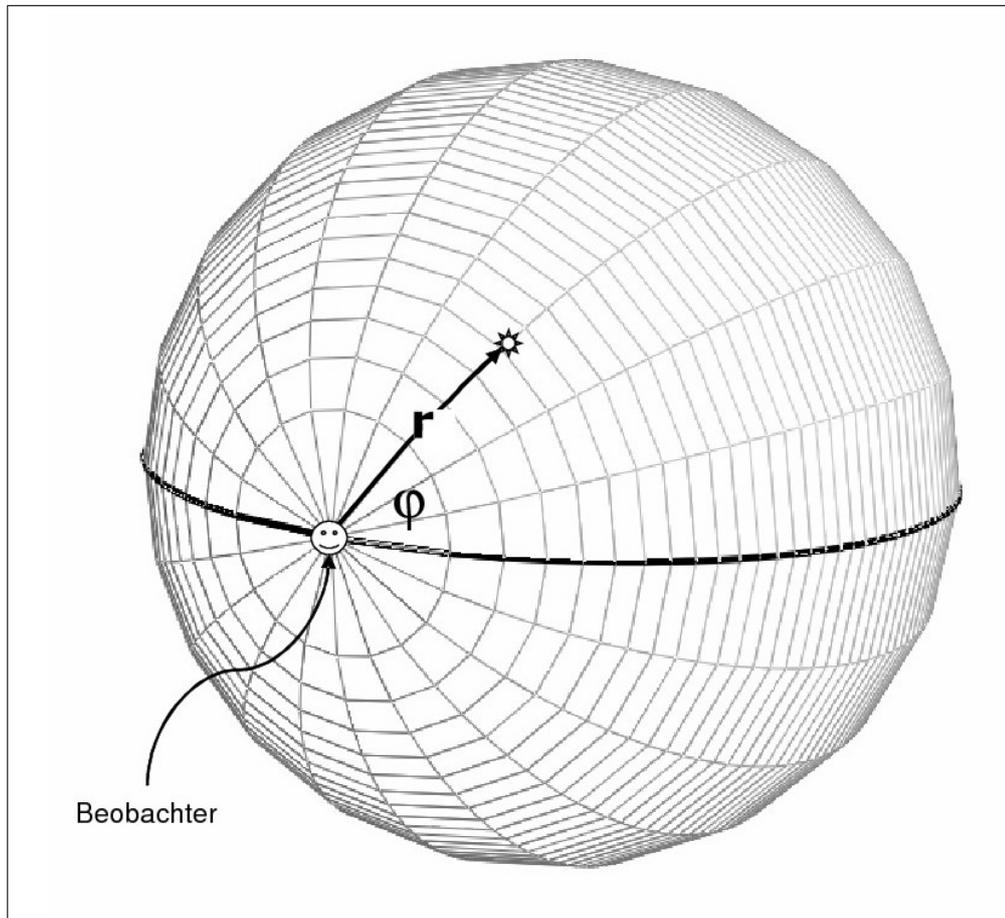


Abbildung 3.8: Koordinatenursprung für den zweidimensionalen positiv gekrümmten Raum kann in die Position des Beobachters gelegt werden.

nicht mehr gelingen; wir müssen uns ganz auf die Formeln verlassen.

An dreidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeiten gibt es genau drei unterschiedliche Ausprägungen, die einen Raum beschreiben: der *flache Raum* (er entspricht unserer gewohnten Euklidischen Geometrie), der *positiv gekrümmte Raum* (er ist das dreidimensionale Analogon zur Kugeloberfläche) und der *negativ gekrümmte Raum* (seine zweidimensionale Entsprechung ist die Sattelfläche, wie sie in der Abb. 2.5 c) auf Seite 37 dargestellt ist).

Im Anhang A.2 werden die Bogenelemente $d\sigma$ für diese drei Fälle abgeleitet. Beispielfhaft beschränken wir uns hier auf den positiv gekrümmten dreidimensionalen Raum; seine Metrik ergibt sich aus (A.5c) zu

$$d\sigma^2 = R^2 \cdot \left(d\xi^2 + \sin^2 \xi \left[d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right] \right) \quad (3.17a)$$

Genau wie im Fall des zweidimensionalen positiv gekrümmten Raumes weiter oben, ersetzen wir auch hier die Koordinate ξ durch r und betrachten diese

als Koordinatendistanz vom Beobachter (analog zu der Situation in Abb. 3.8). Weiterhin nehmen wir an, daß R von der Zeit abhängt, was auch bedeutet, daß der Raum expandieren oder auch kontrahieren kann. Für das zeitabhängige Bogenelement $d\sigma(t)$ erhalten wir dann:

$$d\sigma^2(t, r, \vartheta, \varphi) = a^2(t) \cdot \left(dr^2 + \sin^2 r \left[d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right] \right). \quad (3.17b)$$

Für den negativ gekrümmten, den hyperbolischen Raum, können wir analog verfahren, indem wir in der Formel (A.6b) im Anhang A.2 $\sinh \xi$ durch $\sinh r$ ersetzen und so für das Bogenelement

$$d\sigma^2(t, r, \vartheta, \varphi) = a^2(t) \cdot \left(dr^2 + \sinh^2 r \left[d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right] \right) \quad (3.17c)$$

erhalten. In den beiden letzten Formeln für das Bogenelement ersieht man, daß der Ausdruck innerhalb der eckigen Klammern immer gleich ist. Das selbe gilt auch für die Formel des flachen Raumes (siehe (A.4c im Anhang A.2). Zur Vereinfachung setzt man daher oft

$$d\Omega = (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (3.17d)$$

Das Bogenelement für die drei unterschiedlichen Fälle läßt nun sich zu einer Formel zusammenfassen:

$$d\sigma^2 = a^2(t) \cdot (dr^2 + S^2(r) d\Omega)$$

$$S(r) = \begin{cases} \sin r & \text{positive Krümmung, geschlossener Raum} \\ r & \text{Euklidisch, offener Raum} \\ \sinh r & \text{negative Krümmung, offener Raum} \end{cases} \quad (3.18)$$

In dem Anhang A.2 wird noch eine andere Darstellung (A.8a) für die drei Metriken angegeben, die man erhält, indem $\varrho = \sin r$, $\varrho = r$ resp. $\varrho = \sinh r$ gesetzt wird. Damit bekommen wir als alternative Darstellung mit der Krümmungskonstanten k für das Bogenelement:

$$d\sigma^2 = a^2(t) \left(\frac{d\varrho^2}{1 - k \varrho^2} + \varrho^2 d\Omega \right)$$

$$k = \begin{cases} +1 & \text{positive Krümmung, geschlossener Raum} \\ 0 & \text{Euklidisch, offener Raum} \\ -1 & \text{negative Krümmung, offener Raum} \end{cases} \quad (3.19)$$

Wie man an der letzten Formel feststellen kann, übernimmt die Variable ϱ einfach die Rolle von $S(r)$ aus der Formel (3.18).

Bis jetzt haben wir ausschließlich das (räumliche) Bogenelement betrachtet. Für den expandierenden Raum haben wir es zwar in seiner zeitlichen Abhängigkeit untersucht, für die Belange der EINSTEINSchen Feldgleichungen benötigen wir aber das Linienelement ds

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

Für einen Raum, der dem kosmologischen Prinzip entspricht, d.h. der homogen und isotrop ist, läßt sich zeigen, daß das Linienelement in einen Anteil, der nur die Zeit enthält, und einen, der das zeitabhängige Bogenelement enthält, aufgespalten werden kann (siehe dazu z.B. [31] oder [53]). Wir können also schreiben

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\sigma^2(t, r, \vartheta, \varphi),$$

wobei wir implizit annehmen, daß wie oben Polarkoordinaten genutzt werden. Die beiden Mathematiker HOWARD PERCY ROBERTSON (1903–1961) und ARTHUR GEOFFREY WALKER (1909–2001) zeigten in den frühen 30er Jahren des letzten Jahrhunderts, daß die Metrik

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (dr^2 + S^2(r) d\Omega), \quad (3.20a)$$

wenn wir (3.18) zugrunde legen, oder aber wenn wir (3.19) nutzen,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \cdot \left(\frac{d\varrho^2}{1 - k\varrho^2} + \varrho^2 d\Omega \right), \quad (3.20b)$$

eine exakte Lösung der EINSTEINSchen Feldgleichungen für ein homogenes und isotropes Universum darstellt. Die Metrik heißt ihnen zu Ehren Robertson-Walker-Metrik oder kurz RW-Metrik. ALEXANDER FRIEDMANN und GEORGES LEMAÎTRE hatten bereits früher identische Lösungen gefunden, die aber bei ihrer Veröffentlichung kaum Beachtung fanden; um beiden aber wenigstens nachträglich die ihnen zustehende Ehre zuteil werden zu lassen, spricht man heute vielfach von der Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik, oder kurz von FLRW-Metrik.

Ohne daß wir explizit EINSTEINS Feldgleichungen lösen müssen, können wir aus den bisher gewonnenen Erkenntnissen verschiedene kinematische Effekte über die Expansion aus dem Licht der Galaxien herleiten. Betrachten wir dazu zunächst den Eigenabstand L_p zwischen uns als Beobachter – d.h. entsprechend $r = 0$ – und einer Galaxie in der Koordinatendistanz r_G zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = \text{const}$. Die Beobachtung dieser Galaxie erfolgt ja in radialer Richtung, d.h. unter bestimmten konstanten Winkeln ϑ und φ ; damit ist aber nach (3.17d) $d\Omega = 0$. Aus der Konstanz von t folgt dann sofort aus (3.20a)

$$L_p(t) = a(t) \int_0^{r_G} dr' = a(t) \cdot r \quad (3.21a)$$

Aus dem Eigenabstand kann man nun die „Eigengeschwindigkeit“ V_p als Änderung des Eigenabstandes mit der Zeit ableiten:

$$V_p(t) = \frac{d}{dt} L_p = \dot{a}(t) \cdot r = \frac{\dot{a}}{a} \cdot L_p \quad (3.21b)$$

oder

$$V_p(t) = H(t) \cdot L_p(t) \quad \text{mit} \quad H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (3.21c)$$

mit $H(t)$ als Hubble-Funktion; es ist genau das Geschwindigkeits-Entfernungs-Gesetz, das wir oben schon kennen gelernt hatten. Bezeichnen wir den jetzigen Zeitpunkt mit t_0 , dann ist die (jetzige) „Eigengeschwindigkeit“ oder auch

Fluchtgeschwindigkeit der beobachteten Galaxie

$$V_p(t_0) = H_0 \cdot L_p(t_0) \quad (3.21d)$$

mit der Hubble-Konstanten H_0 . Weder der Eigenabstand noch die Eigengeschwindigkeit sind direkt beobachtbar, denn auf dem Weg des Lichtes, das ja einzige Informationsquelle ist, von dem beobachteten Objekt zu dem Beobachter ändert sich die Zeit und natürlich auch der Skalenfaktor $a(t)$. Was wir messen können, sind Vergangenheitswerte des Abstandes und der Geschwindigkeit; um aber diese im metrischen Maß zu bestimmen, muß die zeitliche Entwicklung des Skalenfaktors bekannt sein und dazu benötigt man die kosmologischen Modelle.

Im Kap. 3.5 hatten wir bereits pauschal die Beziehungen für den Eigenabstand und die Fluchtgeschwindigkeit abgeleitet. Jetzt aber konnte gezeigt werden, daß diese Zusammenhänge auch innerhalb der Allgemeinen Relativitätstheorie ihre Gültigkeit behalten und darüber hinaus für alle drei Typen von Räumen gelten, unabhängig von einer bestimmten, durch k festgelegten Krümmung.

Das Licht, das uns von weit entfernten Galaxien erreicht, ist nach HUBBLES Entdeckung systematisch zum roten Bereich des Spektrums hin verschoben. Diesen Zusammenhang können wir mit den bisher erarbeiteten Ergebnissen ebenfalls kinematisch erklären. Das Licht bewegt sich gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie auf einer Geodäten mit der weiteren Festlegung $ds^2 = 0$. Die Beobachtung erfolgt wieder in radialer Richtung mit $d\Omega = 0$. Damit erhalten wir aus (3.20a)

$$c \frac{dt}{a(t)} = dr \quad (3.22a)$$

Wir nehmen an, daß wir das Licht einer bestimmten Wellenlänge beobachten, denn nur so kann man eine Rotverschiebung auch direkt nachweisen. Nehmen wir weiterhin an, die Zeitdifferenz dt_e zwischen zwei Wellenkämmen des Lichtes, das zur Zeit t_e ausgesandt wird, sei Δt_e . Damit können wir (3.22a) schreiben

$$c \left(\frac{t_e + \Delta t_e}{a(t_e + \Delta t_e)} - \frac{t_e}{a(t_e)} \right) = dr_e \quad (3.22b)$$

Mit ruhigem Gewissen können wir $a(t_e + \Delta t_e) = a(t_e)$ setzen, denn in der kurzen Zeitspanne Δt_e (Größenordnung Nanosekunden) wird sich der Skalenfaktor nicht ändern; folglich gilt

$$c \frac{\Delta t_e}{a(t_e)} = dr_e. \quad (3.22c)$$

Die gleichen Überlegungen stellen wir für die zur Zeit t_0 ankommende Wellen an. Der zeitliche Abstand der beiden Wellenkämme sei entsprechend Δt_0 . Damit erhalten wir

$$c \frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = dr_0 \quad (3.22d)$$

Die Größe r ist eine Koordinate, folglich ist dr eine Koordinatendistanz, die sich bei der Expansion (oder Kontraktion) nicht ändert. Es gilt also $dr_e = dr_0$ und damit

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_e}{a(t_e)} \quad (3.22e)$$

Für den zeitlichen Abstand zweier Wellenkämme gilt $\Delta t = \lambda/c$ mit λ als Wellenlänge; aus der letzten Formel ergibt sich also

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}.$$

D.h. die Welle wird auf dem Weg von einer entfernten Galaxie zu uns als Beobachter auseinander gezogen (bei Expansion). Mit dem z -Wert schließlich für die Rotverschiebung (bei Expansion) erhalten wir

$$z + 1 \equiv \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (3.23)$$

und eine entsprechende Blauverschiebung bei einer Kontraktion des Universums. Häufig wird der Skalenfaktor zum heutigen Zeitpunkt $a(t_0)$ zu eins normiert (er kann ohnehin nicht bestimmt werden), so daß wir auch schreiben können:

$$z + 1 = \frac{1}{a(t_e)}. \quad (3.24)$$

3.7 Die Friedmann-Gleichung und Kosmodynamik

Bisher konnten wir aus den Ergebnissen der Kosmokinematik keinerlei Information über den zeitlichen Verlauf der Expansion (Kontraktion) des Universums gewinnen. Dazu benötigen wir die Kosmodynamik, die die Bewegungsgrößen (Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung) unter Einwirkung von Kräften im Raum beschreibt; im Falle der Allgemeinen Relativitätstheorie die Einwirkung gravitierender Massen oder, da Masse äquivalent der Energie ist, unter Einwirkung der Energiedichte im Universum. Dieses Problem hatten ALEXANDER FRIEDMANN [18] bereits 1922 und unabhängig davon 1927 GEORGES LEMAÎTRE [33] für ein homogenes und isotropes Universum gelöst, ihre Ergebnisse wurden aber praktisch nicht zur Kenntnis genommen. In den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts beherrschte die Diskussion zwischen EINSTEIN und DE SITTER die „Scene“ und nur ganz wenig Theoretiker beschäftigten sich überhaupt mit einer Theorie über das gesamte Universum. Das änderte sich schlagartig, als die beiden Astrophysiker EDWARD MILNE (1896–1950) und WILLIAM MCCREA (1904–1999) 1934 zeigten [39], daß die bisherigen Lösungen der EINSTEINSchen Feldgleichungen zur Dynamik des Universums (FRIEDMANN und LEMAÎTRE) auch mit der einfachen NEWTONschen Theorie – zumindest näherungsweise – hergeleitet werden können. Wir werden daher im Rahmen dieses Skriptums zunächst diese Lösung aufzeigen und sie dann anschließend mit der strengen Herleitung von FRIEDMANN vergleichen.

Die NEWTONSche Kosmologie, wie sie von Harrison genannt wird [24], basiert auf einer Kugel mit konstanter gravitierender Masse M_s mit zeitlich veränderlichem Radius. Die zeitliche Änderung des Radius bringen wir durch

$$R_s(t) = a(t) \cdot R_0 \quad (3.25a)$$

wobei $a(t)$ einen Skalenfaktor und R_0 eine Konstante (quasi eine konstante Koordinatendistanz) repräsentiert. Wie in der Abb. 3.9 angedeutet, betrachten wir das Verhalten eines Probeteilchens der Masse m auf der Oberfläche der expandierenden Kugel. Für das Probeteilchen gilt das NEWTONSche Gesetz

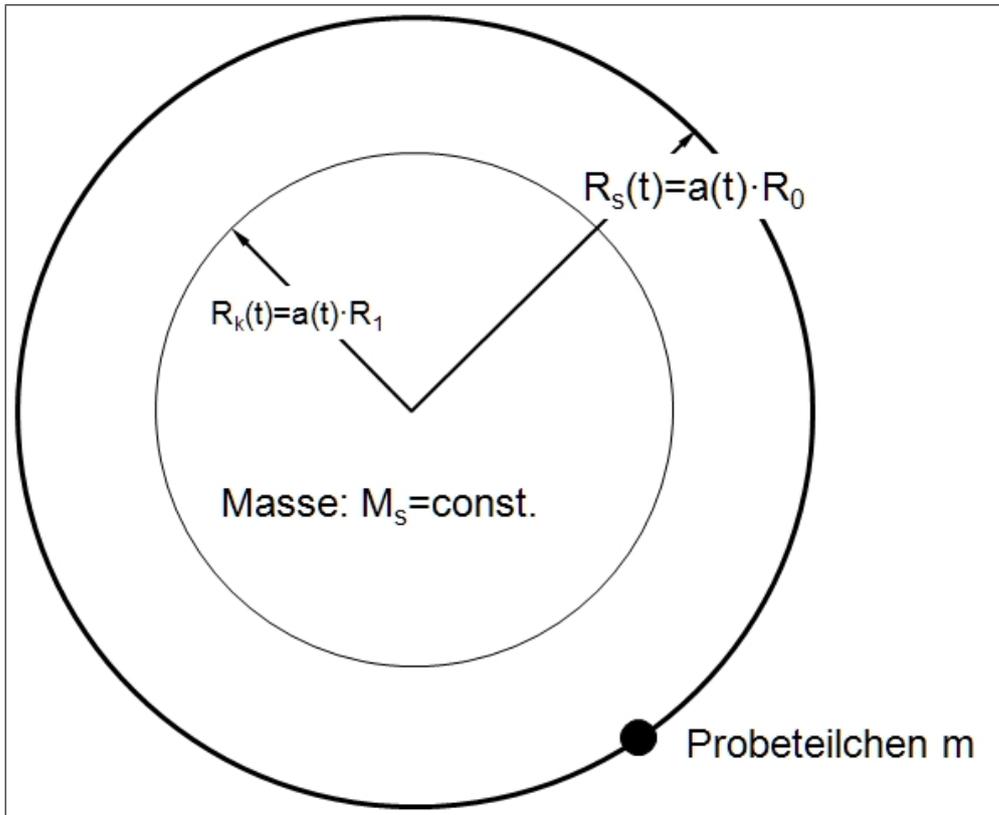


Abbildung 3.9: Zur NEWTONSchen Kosmologie; Erläuterung im Text.

der klassischen Mechanik

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}.$$

Die Kraft, die auf das Probeteilchen einwirkt, resultiert aus der Anziehungskraft der in der Kugel befindlichen Masse M_s ; sie bewirkt eine Beschleunigung des Probeteilchens. Als Formel ausgedrückt lautet das (der Übersichtlichkeit schreiben wir in der Folge R_s statt $R_s(t)$):

$$-\frac{GM_s m}{R_s^2} = m \ddot{R}_s = m \frac{d^2 R_s}{dt^2} \quad (3.25b)$$

G ist hier wieder die Gravitationskonstante. Daß das Probeteilchen auf der Kugeloberfläche sitzt, ist keine Einschränkung der Allgemeinheit. Sätze das Probeteilchen auf der Oberfläche der inneren Kugel mit dem Radius R_k , dann würde eine analoge Gleichung gelten mit dem Radius R_k anstatt R_s , denn die Wirkung der Anziehungskraft der Masse in der Kugelschale zwischen den beiden Radien hebt sich bekanntlich im Inneren gerade auf und es wirkt nur die Masse der kleineren Kugel anziehend. Weiter unten werden wir sehen, daß in der endgültigen Gleichung R_0 und damit natürlich auch R_1 keine Rolle spielen. Multiplizieren wir beide Seiten von (3.25a) mit \dot{R}_s so erhalten wir

$$-GM_s \frac{\dot{R}_s}{R_s^2} = \dot{R}_s \cdot \ddot{R}_s.$$

Letzte Gleichung kann auch geschrieben werden als

$$GM_s \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R_s} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{R}_s)^2. \quad (3.25c)$$

Integration beider Seiten der letzten Gleichung ergibt mit einer Integrationskonstanten U den Energiesatz pro Masse:

$$\frac{GM_s}{R_s} + U = \frac{1}{2} \dot{R}_s^2, \quad (3.25d)$$

wobei die linke Seite für die potentielle Energie pro Masse und die rechte Seite für die kinetische Energie pro Masse steht. Führen wir statt der Masse M_s die Dichte $\varrho(t)$ und führen entsprechend (3.25a) die konstante Größe R_0 ein, so ergibt sich mit

$$M_s = \frac{4\pi}{3} R_s^3 \cdot \varrho(t) = \frac{4\pi}{3} a^3(t) \cdot R_0^3 \cdot \varrho(t)$$

aus der Gleichung (3.25d), nachdem wir hier auch (3.25a) eingeführt haben, nach einfachen Umformungen die gesuchte Gleichung zu

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \varrho(t) + \frac{2U}{R_0^2} \frac{1}{a^2(t)}$$

oder wenn wir die Energiedichte $\varepsilon(t)$ mit $\varepsilon(t) = c^2 \cdot \varrho(t)$ einführen

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) + \frac{2U}{R_0^2} \frac{1}{a^2(t)}. \quad (3.26)$$

Diese Gleichung bezeichnet man als *Friedmann-Gleichung in Newtonscher Näherung*, denn die exakte Lösung der EINSTEINSchen Feldgleichungen fand ALEXANDER FRIEDMANN für ein homogenes und isotropes Universum [18] in der Form

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{k c^2}{a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.27)$$

In dieser *Friedmann-Gleichung* ist k der Parameter, der entsprechend (3.19) über die Art der Krümmung des Raumes entscheidet und Λ die kosmologische Konstante und R_0 der Krümmungsradius zur jetzigen Zeit t_0 . Der

Krümmungsradius R_0 zum Zeitpunkt t_0 wird auf den Wert 1 gesetzt. Alle drei Größen sowie die Energiedichte des Universums sind natürlich unbekannt und man muß versuchen, anhand von Spezialfällen Lösungen für die Differentialgleichung (3.27) zu finden, um sie dann mit astronomischen Beobachtungen zu vergleichen. In der Folge werden wir verschiedene Spezialfälle untersuchen und in einem späteren Kapitel Beobachtungsergebnisse besprechen und sehen, in wie weit daraus auf die unbekanntenen Größen geschlossen werden kann.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall $k = 0$ und $\Lambda = 0$, d.h. ein flaches Universum – mit Euklidischer Geometrie – ohne kosmologische Konstante. Berücksichtigen wir die Definition der Hubble-Funktion $H(t)$ (3.14a) von Seite 73, so können wir für vorliegenden Fall die Friedmann-Gleichung (3.27) schreiben:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t).$$

Diesen Ausdruck nutzen wir nun, um die *kritische Energiedichte* $\varepsilon_c(t)$

$$\varepsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G} H^2(t) \quad (3.28a)$$

und für die *kritische Massendichte* $\varrho_c(t)$ zu definieren:

$$\varrho_c(t) = \frac{3}{8\pi G} H^2(t) \quad (3.28b)$$

Für den heutigen Zeitpunkt $t = t_0$ erhalten wir daraus mit dem Wert der Hubble-Konstanten aus (3.8)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c,0} &= (8,8 \pm 1,7) \cdot 10^{-10} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right] \\ \varrho_{c,0} &= (9,7 \pm 2,0) \cdot 10^{-27} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \end{aligned}$$

Der konkrete Wert der kritischen Energiedichte resp. der kritischen Massendichte, wie oben in (3.28a) und (3.28b) definiert, bezieht sich immer auf ein konkretes kosmologisches Modell, d.h. auf Annahmen über die Parameter k und Λ und ist bestimmt durch den gemessenen Wert von H_0 . Oder anders definiert: mit der kritischen Energie- oder Massendichte, wie oben als konkrete Werte angegeben, ist ein flaches Universum $k = 0$ bei einer kosmologischen Konstanten $\Lambda = 0$ festgelegt.

Die Friedmann-Gleichung (3.27) können wir umformen zu

$$\dot{a}^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) a^2(t) - kc^2 + \frac{\Lambda}{3} a^2(t)$$

und damit läßt sich die Beschleunigung als $\ddot{a}(t)$ ableiten:

$$2\dot{a}(t)\ddot{a}(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \left[\dot{\varepsilon}(t) a^2(t) + 2\varepsilon(t) a(t) \dot{a}(t) \right] + \frac{\Lambda}{3} 2\dot{a}(t) a(t)$$

und daraus nach Division beider Seiten durch $2a(t)\dot{a}(t)$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{4\pi G}{3c^2} \left(\dot{\varepsilon}(t) \frac{a(t)}{\dot{a}(t)} + 2\varepsilon(t) \right) + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.29)$$

Mit Hilfe der 1. Hauptsatzes der Thermodynamik

$$dQ = dE + p \cdot dV$$

kann man Angaben über den Zusammenhang zwischen der Energiedichte $\varepsilon(t)$ und dem Druck $p(t)$ der Materie in einem (idealisierten) Universum machen. In obiger Formel bedeuten Q den Wärmefluß, E die innere Energie, p den Druck und V ein Volumen. In homogenen Systemen, was wir für unser homogenes und isotropes Universum annehmen, ändert sich der Wärmefluß nicht, d.h. es gilt $dQ = 0$. Damit erhalten wir eine Beziehung für die *Energieerhaltung*

$$\frac{dE}{dt} + p \cdot \frac{dV}{dt} = 0. \quad (3.30)$$

Betrachten wir die Verhältnisse in unserer Kugel der Abb. 3.9 mit ihrem Radius $R_s(t) = a(t) \cdot R_0$, so ergibt sich für ihr (zeitlich veränderliche) Volumen und dessen zeitlich Änderung

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{4\pi}{3} a^3(t) \cdot a_0^3 \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{4\pi}{3} a_0^3 \cdot 3a^2(t) \dot{a}(t) = 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} V(t) \end{aligned}$$

Die gesamte Energie in unserer Kugel ergibt sich aus der Energiedichte und dem Volumen zu $E = \varepsilon V$; damit erhalten wir für die zeitliche Änderung der Gesamtenergie

$$\dot{E}(t) = \dot{V}(t) \varepsilon(t) + V(t) \dot{\varepsilon}(t) = V(t) \left[\dot{\varepsilon}(t) + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \varepsilon(t) \right].$$

Setzen wir schließlich \dot{V} und \dot{E} in den Erhaltungssatz der Energie (3.30) ein, so erhalten wir die *Fluidgleichung*:

$$\dot{\varepsilon}(t) + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} [\varepsilon(t) + p(t)] = 0. \quad (3.31)$$

Um die Friedmann-Gleichungen lösen zu können, müssen Annahmen über die zeitliche Abhängigkeit der Energiedichte $\varepsilon(t)$ und des Druckes $p(t)$ getroffen werden. Man betrachtet dabei zwei unterschiedliche Gegebenheiten des Universums, die wir im Folgenden genauer analysieren wollen.

Nichtrelativistisches ideales Gas Über die Materie im Universum macht man zunächst die Annahme, daß sie sich wie ein nichtrelativistisches Gas verhält. Dabei kann man auf die kinetische Theorie der Wärme zurückgreifen, wobei die Beziehung besteht

$$p = kT \frac{\rho}{m},$$

die den Druck p mit der Temperatur T in Verbindung bringt; k ist dabei die Boltzmann-Konstante, ρ die Dichte des Gases und m die Molekülmasse. Für die thermische Energie gilt in diesem Zusammenhang

$$\frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

Dabei ist $\langle v^2 \rangle$ das mittlere Geschwindigkeitsquadrat der Materieteilchen. Berücksichtigen wir nun wieder das Masse-Energie-Äquivalent $\varepsilon = \rho c^2$, so erhalten wir die Zustandsgleichung

$$p = \frac{1}{3} \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \varepsilon \equiv w \varepsilon. \quad (3.32)$$

Den jetzigen Zustand des Universums stellt man sich vereinfacht als ideales Gas vor, in dem die Galaxien die Rolle der Moleküle spielen. Ein anderes Bild des Universums beschreibt es als angefüllt mit Staub, wobei die sich sehr langsam im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit bewegenden Galaxien die Rolle der Staubkörner übernehmen. Die Energiedichte $\varepsilon = \rho c^2$ ist in diesem Fall sehr groß gegenüber der Strahlungsdichte; man spricht daher in diesem Fall von dem *materiedominierten Universum*. Für dieses gilt nach dem soeben gesagten

$$w = \frac{1}{3} \frac{\langle v^2 \rangle}{c^2} \ll 1 \implies p = 0.$$

Im materiedominierten Universum kann man demnach den Druck p vernachlässigen; es ist alleine die Energiedichte der Masse ε_m relevant für die Friedmann- und die Fluidgleichung. Für die Fluidgleichung (3.31) erhalten wir demnach in diesem Fall

$$\dot{\varepsilon}_m(t) + 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \varepsilon_m(t) = 0.$$

Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit $a^3(t)$ und berücksichtigen, daß

$$\frac{d}{dt}(a^3 \varepsilon) = 3a^2 \dot{a} \varepsilon + a^3 \dot{\varepsilon}$$

ist, so erhalten wir schließlich

$$\frac{d}{dt}(a^3(t) \varepsilon_m(t)) = 0 \implies a^3(t) \varepsilon_m(t) = \text{const.} \quad (3.33a)$$

Mit dieser zuletzt gewonnen Beziehung kann dann die Abhängigkeit der Energiedichte der Masse $\varepsilon_m(t)$ von dem Skalenfaktor bestimmt werden. Da das Produkt konstant über die Zeit t ist, können wir mit

$$a^3(t_0) \varepsilon_m(t_0) = a^3(t) \varepsilon_m(t)$$

die Zeitabhängigkeit auf die Energiedichte der Masse auf den heutigen Zeitpunkt beziehen; wenn wir dann noch, wie üblich, $a(t_0) = 1$ setzen, dann erhalten wir

$$\varepsilon_m(t) = \frac{\varepsilon_m(t_0)}{a^3(t)}. \quad (3.33b)$$

D.h. für die Energiedichte der Masse gilt $\varepsilon_m(t) \propto a^{-3}(t)$.

Photonengas In dem Universum befindet sich nun nicht nur (einfach gesprochen) Masse, sondern auch elektromagnetische Strahlung, die ja auch entsprechend dem Masse-Energie-Äquivalent $E = mc^2$ einer Masse entspricht und demnach auch mit Hilfe der Fluidgleichung behandelt werden kann. Die Zustandsgleichung für diesen Fall kann man leicht aus (3.32) ableiten, indem wir $v^2 = c^2$ als Geschwindigkeit der Photonen setzen⁴ und somit für den Druck, den die Strahlung der Energiedichte ε_r ausübt, erhalten

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon_r. \quad (3.34)$$

Setzen wir das in die Fluidgleichung (3.31) ein, so erhalten wir

$$\dot{\varepsilon}_r(t) + 4\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\varepsilon_r(t) = 0.$$

Mit dem gleichen Vorgehen wie oben bei der Energiedichte der Masse, verfahren wir auch hier:

$$\frac{d}{dt}(a^4(t)\varepsilon_r(t)) = 0 \longrightarrow a^4(t)\varepsilon_r(t) = \text{const.} \quad (3.35a)$$

Damit kann dann wieder die Abhängigkeit der Energiedichte der Strahlung $\varepsilon_r(t)$ von dem Skalenfaktor bestimmt werden. Da das Produkt konstant über die Zeit t ist, können wir mit

$$a^4(t_0)\varepsilon_r(t_0) = a^4(t)\varepsilon_r(t)$$

die Zeitabhängigkeit auf die Energiedichte der Masse auf den heutigen Zeitpunkt beziehen; wenn wir dann noch, wie üblich, $a(t_0) = 1$ setzen, dann erhalten wir

$$\varepsilon_r(t) = \frac{\varepsilon_r(t_0)}{a^4(t)}. \quad (3.35b)$$

D.h. für die Energiedichte der Masse gilt $\varepsilon_r(t) \propto a^{-4}(t)$.

Während wir über die Energiedichte der Masse zum heutigen Zeitpunkt $\varepsilon_m(t_0)$ keine Aussage machen können, sondern den Wert aus Beobachtungen bestimmen müssen – wir kommen später noch ausführlich darauf zurück, sind wir im Falle ε_r in einer glücklicheren Situation. Das Universum ist erfüllt mit Strahlung, der sog. Hintergrundstrahlung, einer Strahlung, die der eines schwarzen Körpers von einer Temperatur 2,7 Kelvin exakt entspricht. Zu einem früher Zeitpunkt des Universums – während der Rekombination – entstand diese Strahlung während des thermodynamischen Gleichgewichtes zwischen Materie und Strahlung als Schwarzkörperstrahlung mit dem Planck-Spektrum einer bestimmten Temperatur T . Bei der Expansion des Universums wurde diese Strahlung „verdünnt“ und die Temperatur sank kontinuierlich bis zu dem heutigen Wert von 2,7 Kelvin; das Planck-Spektrum blieb aber dabei erhalten. Da dieses Spektrum durch den einzigen Parameter T bestimmt ist,

⁴Diese Ableitung ist vielleicht nicht ganz seriös, liefert aber trotzdem das richtige Ergebnis.

kann man die Energiedichte der (Hintergrund-) Strahlung bestimmen (siehe z.B. [30] oder [35])

$$\varepsilon_{r,CMB}(t_0) = \frac{\pi^2(kT)^4}{15(\hbar c)^3} \approx 4,17 \cdot 10^{-14} \text{ J m}^{-3}. \quad (3.36)$$

Korrekt Weise muß man auch die vorhandenen Neutrinos als relativistische Teilchen berücksichtigen, was einen konstanten Faktor zu der Energiedichte der Hintergrundstrahlung bedeutet (siehe z.B. [4]):

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r,CMB} \left[1 + \frac{21}{8} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \right] \approx 1,68 \varepsilon_{r,CMB}.$$

Die beiden Energiedichten der „normalen“ Masse und der der relativistischen Teilchen – Photonen und Neutrinos – ergeben in der Summe die Energiedichte, die wir zur weiteren Berechnung der Friedmann-Gleichung (3.27) benötigen. Mit

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_{r,0}}{a^4(t)} + \frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3(t)}$$

ergibt sie sich damit zu

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\frac{\varepsilon_{r,0}}{a^4(t)} + \frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3(t)} \right) - \frac{k c^2}{a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3} \Big| \cdot \frac{1}{H_0^2}.$$

Dividieren wir beide Seiten der letzten Gleichung durch H_0^2 und berücksichtigen (3.21c):

$$\left(\frac{H(t)}{H_0} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2} \left(\frac{\varepsilon_{r,0}}{a^4(t)} + \frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3(t)} \right) - \frac{k c^2}{H_0^2 a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3 H_0^2}.$$

Der Ausdruck vor der runden Klammer auf der rechten Seite obiger Gleichung ist nach (3.28a) nichts anderes als der Kehrwert der kritischen Energiedichte $\varepsilon_{c,0}$ zum heutigen Zeitpunkt. Damit bilden wir zusammen mit der kosmologischen Konstanten Λ die dimensionslosen Parameter:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_{r,0}}{\varepsilon_{c,0}} &= \Omega_{r,0} \\ \frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{c,0}} &= \Omega_{m,0} \\ \frac{\Lambda}{3H_0^2} &= \Omega_{\Lambda,0} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Mit diesen Parametern wird die Friedmann-Gleichung zu

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4(t)} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t)} - \frac{k c^2}{H_0^2 a^2(t)} + \Omega_{\Lambda,0}.$$

Der dritte Term auf der rechten Seite der Gleichung enthält den Krümmungsparameter k zum heutigen Zeitpunkt. Diesen Term können wir durch die Parameter Ω ausdrücken, indem wir obige Gleichung für die Zeit $t = t_0$ berechnen und wie üblich $a(t_0) = 1$ setzen:

$$\frac{k c^2}{H_0^2} = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1.$$

Damit erhalten wir die endgültige Version der Friedmann-Gleichung, ausgedrückt in beobachtbaren Parametern

$$\frac{H^2(a(t))}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t)} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4(t)} - \frac{\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1}{a^2(t)} + \Omega_{\Lambda,0} \quad (3.38a)$$

In dieser Form ist die Differentialgleichung allerdings noch nicht direkt brauchbar, denn sie enthält die Hubble-Funktion in Abhängigkeit von dem Skalenfaktor $a(t)$ und hängt somit nur indirekt von der Zeit t ab. Wenn wir aber die Definition der Hubble-Funktion $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ berücksichtigen, dann kann die letzte Beziehung umgeformt werden zu

$$\frac{d}{dt}a(t) = H_0 \left[\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^2(t)} - (\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1) + a^2(t)\Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2} \quad (3.38b)$$

In Gleichung (3.36) haben wir gesehen, daß die Energiedichte der Strahlung zum heutigen Zeitpunkt sehr klein ist, damit muß auch $\Omega_{r,0}$ sehr klein sein; wir sind sogar in der Lage, den Wert mit (3.28a) zu berechnen:

$$\Omega_{r,0} = \frac{\varepsilon_{r,0}}{\varepsilon_c(t_0)} \approx 8 \cdot 10^{-5}.$$

Wenn wir davon ausgehen, daß $\Omega_{m,0}$ in der Größenordnung von eins ist, was durch die Beobachtung auch tatsächlich bestätigt wird, wie wir in Kap. 4 sehen werden, dann kann man die Energiedichte der Strahlung gegenüber der der Masse vernachlässigen. Erst im (sehr) frühen Universum, wenn es *strahlungsdominiert* ist, dann kommt die Energiedichte der Strahlung zum tragen.

Die Bedeutung der beiden Gleichungen (3.38a) und (3.38b) liegt darin, daß sich die freien Parameter – die Ω s und H_0 – auf den heutigen Zeitpunkt beziehen, d.h. mit aktuellen Beobachtungen in Zusammenhang stehen. Wir werden im Kap. 4 im Detail darauf zurückkommen und aufzeigen, wie die beiden Beziehungen genutzt werden können, um in Verbindung mit astronomischen Beobachtungen ein plausibles kosmologisches Modell aus der Vielzahl der möglichen Varianten zu selektieren. Hat man $\Omega_{m,0}$ und $\Omega_{\Lambda,0}$ aus Beobachtungen bestimmt (unter Vernachlässigung von $\Omega_{r,0}$), so kann man daraus z.B. auf die Art der Krümmung des Universums schließen. Denn es gilt:

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} \begin{cases} > 1 & : k=+1, \text{ sphärischer Raum, geschlossen} \\ = 1 & : k=0, \text{ flacher Raum, offen} \\ < 1 & : k=-1 \text{ hyperbolischer Raum, offen} \end{cases} \quad (3.39)$$

Eine weitere Beziehung, die in der Literatur häufig genutzt wird, können wir aus (3.29) gewinnen, bei der die 2. Ableitung nach dem Skalenfaktor $\ddot{a}(t)$ gegeben ist. Mit der Fluidgleichung (3.31) ergibt sich daraus

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2} \left(\varepsilon_m(t) + 3p(t) \right) + \frac{\Lambda}{3}.$$

Betrachten wir hier ausschließlich das materiedominierte und flache Universum, so kann die Energiedichte der Strahlung vernachlässigt und $p = 0$ gesetzt werden. Mit den Definitionen für $\Omega_{m,0}$ und $\Omega_{\Lambda,0}$ erhalten wir:

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = H_0^2 \left[-\frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t)} + \Omega_{\Lambda,0} \right] \quad (3.40)$$

Letztere Gleichung wird als *Beschleunigungsgleichung* bezeichnet; sie ist allerdings nicht unabhängig von der Friedmann-Gleichung (3.38b). Ein weiterer Zusammenhang, der definitorischen Charakter hat und häufig genutzt wird, ist die Bremsfunktion oder auch Dezelerationsfunktion q :

$$q(t) = -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)}. \quad (3.41)$$

Solange die Dezelerationsfunktion in einem Universum positiv ist, wird die Expansion gebremst (daher auch der Name „Bremsfunktion“), wenn sie negativ ist, liegt eine Beschleunigung der Expansion vor. Der Wert der Bremsfunktion zum heutigen Zeitpunkt q_0 läßt sich wiederum aus astronomischen Beobachtung ableiten.

Mit Hilfe der Gleichungen (3.40), (3.41), (3.39) und (3.38a) können wir unter den oben genannten Voraussetzungen (materiedominiertes und flaches Universum mit einer kosmologischen Konstante) die Beziehung für $q(t)$ explizit herleiten:

$$q(t) = \frac{3}{2} \frac{\frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t)}}{\frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t)} + \Omega_{\Lambda,0}} - 1 \quad (3.42a)$$

Wenn wir, wie üblich, zum heutigen Zeitpunkt t_0 $a(t_0) = 1$ setzen, dann erhalten wir für $q(t_0)$

$$q(t_0) = \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}} - 1 = \frac{1}{2} \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}. \quad (3.42b)$$

Die Bedingung, daß zum heutigen Zeitpunkt eine beschleunigte Expansion des Universums vorliegt, heißt nach dem oben beschriebenen

$$q(t_0) < 0.$$

Nach der Beziehung (3.42b) erhalten wir dann für diesen Fall die Bedingung, die für $\Omega_{m,0}$ und $\Omega_{\Lambda,0}$ vorliegen müssen

$$\frac{1}{2} \Omega_{m,0} < \Omega_{\Lambda,0}. \quad (3.42c)$$

Wir werden in einem späteren Kapitel sehen, daß kosmologische Beobachtungen zeigen, daß heute tatsächlich eine beschleunigte Expansion unseres Universums vorliegt.

Für Zeiten $t \ll t_0$ wird $a(t)$ immer kleiner und der Ausdruck $\Omega_{m,0}/a^3(t)$ immer größer, so daß im Nenner von (3.42a) wegen $\Omega_{\Lambda,0} = const.$ dagegen

vernachlässigbar wird. Für diese frühen Zeiten des Universums geht demnach $q(t) \rightarrow +1/2$ über. Das bedeutet aber, daß zu diesen früher Zeitpunkten eine gebremste Expansion vorliegen muß. Wenn aber nun zu dem heutigen Zeitpunkt eine beschleunigte Expansion nachgewiesen wird, dann muß zu einem bestimmten früheren Zeitpunkt der Übergang von gebremster zu beschleunigter Expansion stattgefunden haben. Der Zeitpunkt t_{exp} ist leicht festzulegen, denn genau da muß gelten

$$q(t_{exp}) = 0.$$

Aus (3.42a) erhalten wir dann für den Skalenfaktor $a(t_{exp})$ zum Zeitpunkt dieses Überganges

$$a(t_{exp}) = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{m,0}}{2 \cdot \Omega_{\Lambda,0}}} \quad (3.42d)$$

Mit der Beziehung (3.24) können wir aus obiger Gleichung den z-Wert z_{exp} – die Rotverschiebung – bestimmen, zu dem der Übergang stattfindet:

$$z_{exp} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}} - 1. \quad (3.42e)$$

Über die kosmologische Konstante Λ sind zum Abschluß dieses Kapitels noch einige Bemerkungen zu machen. EINSTEIN hatte sie ursprünglich eingeführt, um sein Universum statisch zu machen, war aber gezwungen, die Idee wieder aufzugeben, als die Expansion des Universums durch HUBBLE endgültig bewiesen wurde. Später, in den 90er Jahren des letzten Jahrhunderts, mußte sie aufgrund von Beobachtungen der Supernovae 1a wieder eingeführt werden – in Kap. 4.1 werden wir genauer darauf eingehen. Aus diesem Grund wurde diese Konstante auch konsequent in den Ableitungen der Friedmann-Gleichungen mitgeführt. Was aber bewirkt diese Konstante? Um das herauszufinden greifen wir auf die ursprüngliche Friedmann-Gleichung (3.27)

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) - \frac{k c^2}{a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3}$$

zurück und schreiben sie leicht um:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left(\varepsilon(t) + \frac{3c^2}{8\pi G} \cdot \frac{\Lambda}{3} \right) - \frac{k c^2}{a^2(t)}$$

Definieren wir nun die Energiedichte der kosmologischen Konstanten als

$$\varepsilon_{\Lambda} = \frac{3c^2}{8\pi G} \cdot \frac{\Lambda}{3} \quad (= const.),$$

dann können wir die Friedmann-Gleichung schreiben als

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} (\varepsilon(t) + \varepsilon_{\Lambda}) - \frac{k c^2}{a^2(t)}.$$

Genau wie bei der Energiedichten der Materie und der Strahlung können wir den Zusammenhang zwischen der Energiedichte der kosmologischen Konstanten ε_Λ und den Druck p_Λ in einem (idealisierten) Universum durch die Fluidgleichung analog (3.31) beschreiben:

$$\dot{\varepsilon}_\Lambda + 3\frac{\dot{a}}{a}\left[\varepsilon_\Lambda + p_\Lambda(t)\right] = 0.$$

Da $\dot{\varepsilon}_\Lambda = 0$ ist, ergibt sich aus der Fluidgleichung

$$\varepsilon_\Lambda = -p_\Lambda(t) \quad (= \text{const.}),$$

so daß die Friedmann-Gleichung lautet:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\varepsilon(t) - p_\Lambda\right) - \frac{k c^2}{a^2(t)}. \quad (3.43)$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die kosmologische Konstante, repräsentiert durch p_Λ , wie ein *negativer Druck* wirkt, der der anziehenden Wirkung der Energiedichte $\varepsilon(t)$ entgegenwirkt. Während „normaler“ Druck entsprechend der Zustandsgleichung (3.32) zur anziehenden Gravitation⁵ beiträgt, aber in dem idealisierten Universum vernachlässigt werden kann, bewirkt der negative Druck quasi eine „negative“ Gravitation, eine abstoßende Gravitation. Wenn also die kosmologische Konstante im Universum vorhanden ist, dann wird mit fortschreitender Expansion die Energiedichte $\varepsilon(t)$ immer mehr abnehmen und schließlich der negative Druck die Oberhand gewinnen und zu einem beschleunigt expandierenden Universum führen – wie es offensichtlich in unserem Universum der Fall ist, wie die Beobachtungen (siehe Kap. 4.1) zeigen.

3.8 Kosmologische Modelle

Die Art und Weise, wie der Skalenfaktor mit der Zeit sich ändert, zeigt an, wie das Universum expandiert. Wir haben gesehen, daß die Friedmann-Gleichung und die Beschleunigungsgleichung in den Ω s freie Parameter hat. Grundannahme ist darüber hinaus das kosmologische Prinzip eines homogenen und isotropen Universums. Aus diesem Grund wird es, je nach Art der Parameter viele verschiedene Möglichkeiten geben, wie sich die Größe des Universums mit der Zeit ändern kann, und eine der wesentliche Aufgabe der Kosmologie ist, dasjenige Modell des Universums zu bestimmen, das am besten mit der Beobachtung übereinstimmt.

Man hat nun, je nach Parameter und deren Kombinationen eine Vielzahl von kosmologischen Modelle diskutiert, von denen wir im Folgenden die wichtigsten vorstellen werden. Was die Namensgebung der Modelle anbelangt, so werden wir Harrisons Buch *Cosmology* [24] folgen. Wir betrachten zunächst die Modelle ohne kosmologische Konstante Λ , d.h. $\Omega_{\Lambda,0} = 0$, und unterscheiden sowohl in dem materiedominierten und strahlungsdominierten Universum

⁵Der Druck ist Bestandteil des Energie-Impuls-Tensors, der alle gravitierenden Komponenten beinhaltet.

nach den Werten der Krümmungskonstanten k , also entsprechend (3.39) den Werten von $\Omega_{m,0}$. Bei den Modellen mit $\Lambda \neq 0$ werden wir uns auf der Fall des materiedominierten Universums beschränken.

3.8.1 Friedmannsche Universen ($\Lambda = 0$)

Diese Gruppe von kosmologischen Modellen wurde bereits 1922 von ALEXANDER FRIEDMANN in seiner Arbeit [18] diskutiert und 1927 von GEORGES LEMAÎTRE wieder entdeckt [33], aber zu ihrer Zeit nicht zur Kenntnis genommen; heute wird diese Modell-Familie mit $\Lambda = 0$ zu Ehren FRIEDMANNs nach ihm benannt.

Betrachten wir zunächst ein materiedominiertes Universum. Die Friedmann-Gleichung (3.38b) vereinfacht sich mit den getroffenen Annahmen zu

$$\frac{d}{dt}a(t) = H_0 \left[\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)} - (\Omega_{m,0} - 1) \right]^{1/2} \quad (3.44)$$

Aus dieser Gleichung sieht man sofort, daß für $a(t) \rightarrow 0$ eine Singularität auftreten muß, denn

$$\frac{d}{dt}a(t) \propto \frac{1}{\sqrt{a(t)}} \xrightarrow{a(t) \rightarrow 0} \infty$$

und diese Singularität tritt in allen FRIEDMANNschen Modellen auf. Um die unterschiedlichen Lösungen dieser Modelle nun für die drei unterschiedlichen Krümmungskonstanten zu bestimmen, muß man die aus (3.44) folgende Gleichung integrieren:

$$dt = \frac{da(t)}{H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)} - (\Omega_{m,0} - 1)}}. \quad (3.45)$$

Daraus ergibt sich das zeitliche Verhalten des Skalenfaktors $a(t)$ in den drei unterschiedlichen Universen; in Folgenden werden wir sie im Einzelnen besprechen.

Flaches Universum; $k = 0$ Dieses kosmologische Modell wurde 1932 gemeinsam von EINSTEIN und DE SITTER untersucht und ist das einfachste aller denkbaren; ein flacher (Euklidischer), unendlicher und grenzenloser Raum. Die Gleichung (3.45) für dieses Einstein-de Sitter Modell hat, wenn man den Fall des flachen, Euklidischen Raumes gemäß (3.39) berücksichtigt

$$k = 0 \longrightarrow \Omega_{m,0} = 1,$$

eine besonders einfache Form und läßt sich leicht integrieren:

$$\int_0^t dt' = \frac{1}{H_0} \int_0^{a(t)} \sqrt{x} dx = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3} a^{3/2}(t) \quad (3.46a)$$

mit dem Ergebnis

$$t = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3} a^{3/2}(t). \quad (3.46b)$$

Diese Beziehung aufgelöst nach $a(t)$ ergibt das zeitliche Verhalten des Skalenfaktors

$$a(t) = \left(\frac{2}{3 \cdot H_0} \right)^{-2/3} t^{2/3}. \quad (3.46c)$$

Die Tatsache, daß $\Omega_{m,0} = 1$ ist bedeutet, daß die Energiedichte der Masse in diesem Modell genau der kritischen Massendichte entspricht; wir haben also den Fall vor uns, den wir zu Beginn des Kap. 3.7 betrachtet haben. Der zeitliche Verlauf des Skalenfaktors $a(t)$ ist in der Abb. 3.10 dargestellt; der heutige Zeitpunkt wird durch t_0 symbolisiert. Aus der oben abgeleiteten Konstanz der Gesamtenergie $\varepsilon_m \cdot a^3(t)$ können wir schließen, daß wegen

$$\varepsilon_m(t) \propto \frac{1}{a^3(t)} \propto \frac{1}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$$

für die Energiedichte ebenfalls zur Zeit $t = 0$ eine Singularität auftritt. Aus dieser großen Energiedichte resultiert der Urknall (engl. big bang), in dessen unmittelbaren zeitlichen Nähe auch die Geschwindigkeit $\dot{a}(t)$, mit der sich der Skalenfaktor ändert ebenfalls sehr groß wird. Dieses Einstein-de Sitter Modell expandiert kontinuierlich und hat eine unendliche Lebensdauer.

Für die Hubble-Funktion erhalten wir für das Einstein-de Sitter Modell

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t} \quad (3.46d)$$

und mit der Hubble-Konstanten H_0 ergibt sich die Zeit t_0 , die seit dem Urknall vergangen ist, zu

$$t_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{H_0}. \quad (3.46e)$$

In der Abb. 3.10 ist der Zusammenhang dargestellt. Normiert man, wie es gewöhnlich geschieht, den Skalenfaktor zum heutigen Zeitpunkt $a(t_0) = 1$, so stellt die Hubble-Funktion $H(t_0)$ die Steigung der Tangente an die Kurve der Hubble-Funktion bei $t = t_0$ dar. Man findet in der astronomischen Literatur noch verschiedentlich den Begriff „Hubble-Periode = $1/H_0$ “. Die Hubble-Periode gibt also die Zeitdifferenz zwischen dem Schnittpunkt der Tangente und dem Zeitpunkt t_0 an (siehe Abb. 3.10). In einem gleichmäßig expandierenden Universum würde die Hubble-Periode dem Weltalter entsprechen; in einem Universum mit gebremster Expansion, wie wir es hier vor uns haben (siehe unten), ist die Hubble-Periode immer größer als das Weltalter, in beschleunigt expandierenden dagegen kleiner. Im Einstein-de Sitter Modell ist

$$\text{Hubble - Periode} = t_H = \frac{3}{2} \cdot t_0. \quad (3.46f)$$

Die Bremsfunktion zum heutigen Zeitpunkt q_0 – eine aus Beobachtungen deduzierbare Größe – ist nach (3.41)

$$q(t) = -\frac{a(t) \cdot \ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)}.$$

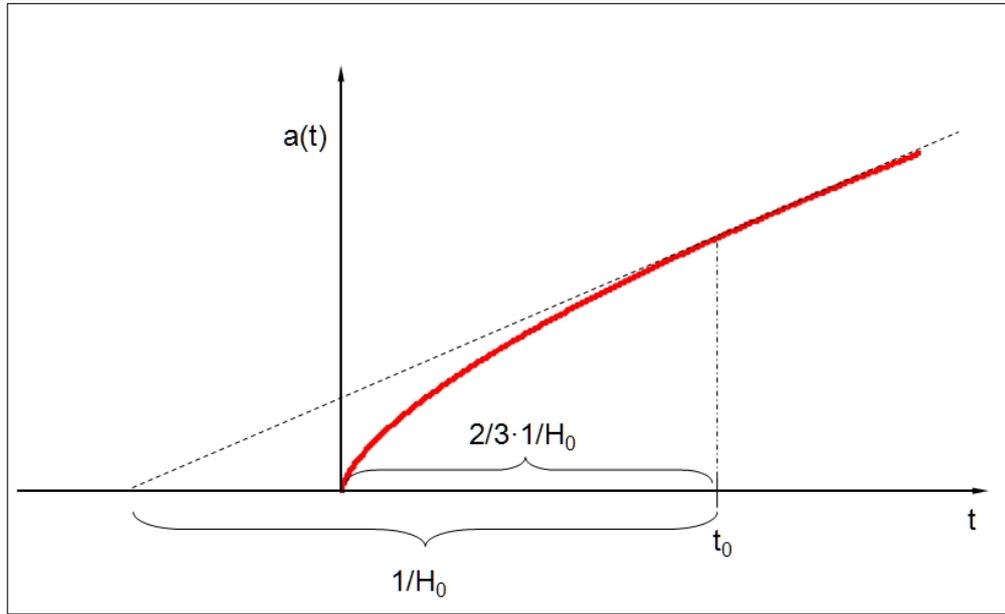


Abbildung 3.10: Der Skalenfaktor $a(t)$ als Funktion der Zeit t für das materiedominierte flache ($k = 0$) Einstein-de Sitter Modell ($\Omega_{\Lambda,0} = 0$).

Setzen wir $a(t)$ hier ein, so erhalten wir für das Einstein-de Sitter Modell den Wert der Bremsfunktion zum heutigen Zeitpunkt zu $q_0 = 1/2$; der positive Wert zeigt eine Dezeleration, also eine gebremste Expansion, an. Beobachtungen ergeben aber einen aktuellen von $q_0 = -0,67 \pm 0,25$ [17], also eine Beschleunigung anstatt einer Abbremsung.

Für das vorliegende Einstein-de Sitter Modell können wir die Frage stellen, wie groß der Schwarzschildradius derjenigen Masse des Universums ist, die sich innerhalb der Hubble-Sphäre befindet. Nach der Definition (2.16) auf Seite 50 ist er gegeben als

$$\mathfrak{R} = \frac{2 \cdot G \cdot M_H}{c^2},$$

wobei M_H die Masse innerhalb der Hubble-Sphäre ist. Mit der Hubble-Länge $L_H(t)$ aus (3.14c) und der kritischen Massendichte $\rho_c(t)$ aus (3.28b) können wir M_H ausdrücken und für den (zeitabhängigen) Schwarzschildradius schreiben

$$\mathfrak{R}(t) = \frac{8\pi}{3c^2} G \rho_c(t) L_H^3(t).$$

Setzen wir für die kritische Massendichte und die Hubble-Länge die entsprechenden Ausdrücke in obige Formel ein, so erhalten wir mit einfachen Umformungen

$$\mathfrak{R}(t) = \frac{c}{H(t)} = L_H(t).$$

Das bedeutet, daß in dem Einstein-de Sitter Modell die Hubble-Sphäre mit dem Ereignishorizont der umschlossenen Materie zusammenfällt.

Berechnen wir für dieses kosmologische Modell auch das Weltalter, indem wir den Wert der Hubble-Konstanten H_0 aus (3.9) in (3.46e) einsetzen, so erhalten wir für das Alter $9,3 \pm 0,9 \cdot 10^9$ Jahre, ebenfalls ein Wert, der signifikant von neueren Ergebnissen $13,5 \pm 1,5 \cdot 10^9$ Jahre abweicht (siehe [17]). Das Einstein-de Sitter Modell ist demnach aber nicht das geeignete Modell, um aktuelle Meßwerte theoretisch zu verifizieren.

Sphärischer Raum; $k=1$ Dieses sphärische Universum wurde ebenfalls von FRIEDMANN 1922 zum ersten mal beschrieben und unabhängig davon von LEMAÎTRE 1927 wieder entdeckt. Es wird durch einen sphärischen endlichen Raum ohne Grenze beschrieben. Zu Ehren von ALEXANDER FRIEDMANN wird es gewöhnlich Friedmann Universum genannt (nicht zu verwechseln mit der gerade diskutierten Modellfamilie!). Die Friedmann-Gleichung (3.44) lautet in diesem Fall:

$$\frac{d}{dt}a(t) = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)} - (\Omega_{m,0} - 1)} \quad (3.47a)$$

Aus der Definition eines sphärischen Raumes mit Hilfe der Ω s gemäß (3.39) ersieht man, daß $\Omega_{m,0} > 1$ sein muß, also eine Masse besitzen muß die größer als die kritische Masse ist. Diese Gleichung ist nun bei weitem nicht so einfach zu integrieren wie im Fall des Einstein-de Sitter Modell. Man führt vielmehr eine Substitution folgender Art ein

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{\beta}{2}(1 - \cos u) \\ \beta &= \frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0} - 1} \end{aligned} \quad (3.47b)$$

Diese Substitution in die rechte Seite der Gleichung (3.47a) eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)} - (\Omega_{m,0} - 1)} &= H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} \sqrt{\frac{\beta}{a(t)} - 1} \\ &= H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} \sqrt{\frac{1 + \cos u}{1 - \cos u}} \\ &= H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} \frac{\sin u}{1 - \cos u} \end{aligned} \quad (3.47c)$$

Für die linke Seite von (3.47a) können wir schreiben

$$\frac{d}{dt}a(t) = \frac{da}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{\beta}{2} \sin u \frac{du}{dt}. \quad (3.47d)$$

Gemäß (3.47a) sind ja linke und rechte Seite der Gleichung gleich, d.h. wir können die rechten Seiten von (3.47c) und (3.47d) gleichsetzen und erhalten dadurch

$$dt = \frac{\beta}{2} \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} (1 - \cos u) du,$$

eine Gleichung, die leicht zu integrieren ist. Das Resultat ist eine Parametergleichung für t in Abhängigkeit von u und mit der substituierten Gleichung

(3.47b) haben wir die entsprechende Beziehung für a :

$$t = \frac{\beta}{2 H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1}} (u - \sin u) \quad (3.47e)$$

$$a = \frac{\beta}{2} (1 - \cos u)$$

Eine Auflösung dieser beiden Gleichungen nach $a(t)$ ist nicht möglich! Die Kurvenform aber, die sich aus den beiden Parametergleichungen für a und t ergibt, ist eine Zyklode wie in Abb. 3.11 dargestellt⁶. Das Maximum des

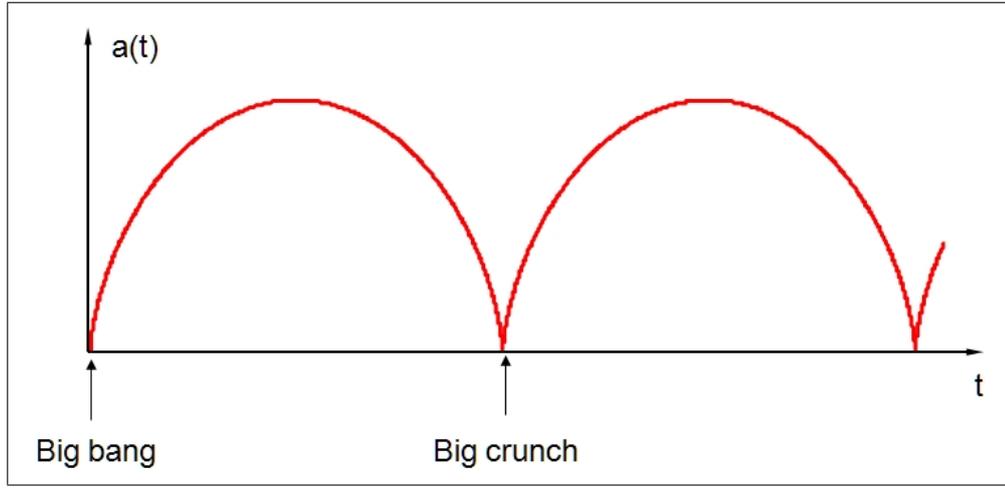


Abbildung 3.11: Der Skalenfaktor $a(t)$ als Funktion der Zeit t für das materiedominierte geschlossenes ($k = 1$) Friedmann Universum mit der kosmologische Konstante $\Lambda = 0$. Das Universum startet mit einem Urknall (big bang) und endet in einem Kollaps (big crunch), um wieder mit einem Urknall zu starten.

Skalenfaktors a_{max} ist erreicht, wenn $\frac{d}{dt}a(t) = 0$ ist. Das lässt sich leicht aus (3.47a) bestimmen:

$$\frac{d}{dt}a(t) = 0 \Rightarrow H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1} \sqrt{\frac{\beta - a_{max}}{a_{max}}} = 0 \Rightarrow a_{max} = \beta.$$

Wie man leicht aus der zweiten Gleichung (3.47e) ersehen kann ist

$$a(u) = 0 \quad \text{wenn} \quad u = n \cdot 2\pi ; \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Damit ist die Zeitspanne t_{max} zwischen einem Urknall und einem Kollaps

$$t_{max} = \pi \beta \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} - 1}}.$$

Hyperbolischer Raum; $k=-1$ Diese Art von Universum wurde ebenfalls von FRIEDMANN beschrieben und 1932 von dem deutschen Kosmologen OTTO HECKMANN (1901–1983) eingehend untersucht. Das Universum hat in diesem Fall einen hyperbolischen expandierenden offenen Raum, der unendlich

⁶Die Zyklode ist die Kurve, die ein Punkt auf einem rollenden Kreis beschreibt.

in Raum und Zeit ist. Dieses Universum muß gemäß (3.39) eine Massendichte aufweisen, die kleiner als die kritische Masse ist, denn es gilt $\Omega_{m,0} < 1$; damit ist

$$\Omega_{m,0} - 1 < 0.$$

In diesem Fall lautet die Friedmann-Gleichung (3.44)

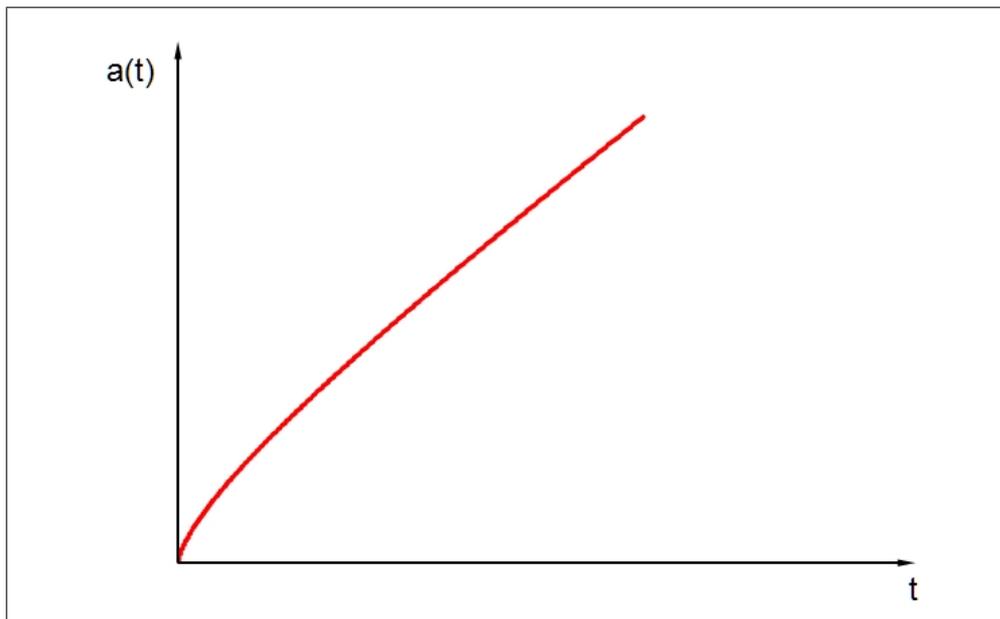


Abbildung 3.12: Der Skalenfaktor $a(t)$ als Funktion der Zeit t für das materiedominierte offene ($k = -1$) hyperbolische Universum mit der kosmologischen Konstante $\Lambda = 0$. Das Universum startet mit einem Urknall (big bang) und die Expansionsgeschwindigkeit nähert sich einem Wert, der proportional zu t ist.

$$\frac{d}{dt}a(t) = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)} + (1 - \Omega_{m,0})}. \quad (3.48a)$$

Hier wurde das negative Vorzeichen in die runde Klammer unter der Wurzel gezogen, damit $(1 - \Omega_{m,0})$ positiv ist. Mit der Größe β

$$\beta = \frac{\Omega_{m,0}}{1 - \Omega_{m,0}}$$

ergibt sich schließlich die Friedmann-Gleichung für diesen Fall zu:

$$\frac{d}{dt}a(t) = H_0 \sqrt{1 - \Omega_{m,0}} \sqrt{\frac{\beta}{a(t)} + 1}. \quad (3.48b)$$

Die explizite Integration von (3.48b) soll hier nicht durchgeführt werden, der Verlauf des Skalenfaktors in Abhängigkeit von der Zeit ist vielmehr in der Abb. 3.12 graphisch dargestellt. Dieses Universum startet ebenfalls mit einem Urknall und expandiert wie das Einstein-de Sitter Modell auf alle Zeit. Es läßt

sich leicht zeigen, daß dabei für sehr große Werte von $a(t)$ der Skalenfaktor $a(t)$ proportional zur Zeit t anwächst. In diesem Fall wird (3.48b) zu

$$\frac{d}{dt}a(t) \xrightarrow{a(t) \rightarrow \infty} H_0 \sqrt{1 - \Omega_{m,0}} \rightarrow a(t) \propto t.$$

Das strahlungsdominierte Universum Betrachten wir nun noch kurz diesen Fall ebenfalls für $\Lambda = 0$. Strahlungsdominiert heißt, daß wir $\Omega_{m,0}$ gegenüber $\Omega_{r,0}$ vernachlässigen können. Aus der Friedmann-Gleichung (3.38b) wird dann

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}a(t) &= H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{r,0}}{a^2(t)} - (\Omega_{r,0} - 1)} \\ &= \frac{H_0}{a(t)} \sqrt{\Omega_{r,0} - (\Omega_{r,0} - 1)a^2(t)} \end{aligned} \quad (3.49a)$$

und daraus ergibt sich, wenn wir nach dt auflösen, die zu integrierende Gleichung für die Abhängigkeit des Skalenfaktors von der Zeit

$$dt = \frac{a(t)}{H_0 \sqrt{\Omega_{r,0} - (\Omega_{r,0} - 1)a^2(t)}}. \quad (3.49b)$$

Für dieses strahlungsdominierte Universum unterscheiden wir im Folgenden wieder die drei Arten der Krümmung des Raumes, indem wir jeweils (3.49b) integrieren:

$$\int_0^t dt' = \int_0^{a(t)} \frac{x dx}{H_0 \sqrt{\Omega_{r,0} - (\Omega_{r,0} - 1)x^2}} \quad (3.49c)$$

und es zeigt sich, daß wir in diesem Fall das Ergebnis explizit nach $a(t)$ auflösen können; das Ergebnis ist für die verschiedenen Werte der Krümmung dargestellt:

k=0 Für das flache (strahlungsdominierte) Universum muß $\Omega_{r,0} = 1$ sein. Der Skalenfaktor $a(t)$, die Hubble-Funktion und die Bremsfunktion ergeben sich für diesen Fall zu

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{2} H_0 t^{1/2} \\ H(t) &= \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} \\ q_0 &= -\frac{\dot{a}\ddot{a}}{\dot{a}^2} = 1 \end{aligned}$$

k=+1 Der Skalenfaktor $a(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit für das sphärische Universum mit $\Omega_{r,0} > 1 \rightarrow (\Omega_{r,0} - 1) > 0$ ist

$$a(t) = \sqrt{\frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{r,0} - 1} - H_0^2 (\Omega_{r,0} - 1) t^2}$$

k=-1 Im hyperbolischen Universum muß der Wert von $\Omega_{r,0} < 1$ sein, d.h. $\Omega_{r,0} - 1 < 0$, weswegen in (3.49c) vor der letzten runden Klammer das

Vorzeichen umgekehrt wird, um einen positiven Wert dieser Klammer zu erhalten. In diesem Fall ist die funktionale Abhängigkeit des Skalenfaktors von der Zeit gegeben durch

$$a(t) = \sqrt{\frac{\Omega_{r,0}}{1 - \Omega_{r,0}} + H_0^2(1 - \Omega_{r,0})t^2}; \quad t \rightarrow \infty : a(t) \propto t$$

Die Kurvenverläufe für den Skalenfaktor $a(t)$ sind für alle drei Parameter von k hier ähnlich wie im materiedominierten Universum, mit der Ausnahme, daß es bei $k = +1$ nur einen „big crunch“ gibt und die Zeitspanne zwischen Urknall und Kollaps ist kleiner als im materiedominierten Universum, im Gegensatz zu dem Verhalten, wie es in der Abb. 3.11 gezeigt ist⁷. Die maximale Ausdehnung a_{max} dieses sphärischen Universums ist gegeben durch

$$a_{max} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{r,0} - 1}$$

und die Zeit T_{max} zwischen Urknall und „big crunch“ ergibt sich zu

$$t_{max} = \frac{2\sqrt{\Omega_{r,0}}}{H_0(\Omega_{r,0} - 1)}$$

3.8.2 Universen mit kosmologischem Parameter ($\Lambda \neq 0$)

Auch wenn EINSTEIN seine kosmologische Konstante wieder aufgab und ihre Einführung als „seine größte Eselei“ bezeichnete, ist ihre Berücksichtigung doch wieder wichtig und kosmologische Modelle unter ihrem Einfluß intensiv untersucht worden. Für die folgenden Überlegungen soll der Vollständigkeit halber die Friedmann-Gleichung mit dem Λ -Glied hier noch mal angeführt werden:

$$\frac{d}{dt}a(t) = H_0 \left[\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^2(t)} - (\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1) + a^2(t)\Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2} \quad (3.50)$$

Betrachten wir zunächst ein eher exotisches Beispiel für ein kosmologisches Modell: ein flaches Universum ($k = 0$) mit verschwindend kleiner Energiedichte der Masse und der Strahlung ($\Omega_{m,0}, \Omega_{r,0} \approx 0$) und positiver kosmologischer Konstante ($\Omega_{\Lambda,0} > 0$). Die Friedmann-Gleichung vereinfacht sich für diesen Fall zu

$$\frac{d}{dt}a(t) = H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} a(t)$$

mit der Lösung

$$a(t) = e^{H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}(t-t_0)}$$

⁷Eine Übersicht über alle möglichen Funktionsverläufe des Skalenfaktors $a(t)$ in Abhängigkeit vor k und Λ findet sich bei Harrison [24] S. 366 ff.

Für die Hubble-Funktion $H(t)$ und die Bremsfunktion q_0 ergeben ebenfalls sehr einfache Zusammenhänge

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}} = \text{const.}$$

$$q_0 = -\frac{a(t) \cdot \ddot{a}(t)}{\dot{a}^2(t)} = -1 \quad (\text{Beschleunigung!})$$

Dieses kosmologische Modell ist nichts anderes als das schon in Kap. 3.2 beschriebene von DE SITTER mit seinem merkwürdigen Verhalten. Darin gibt es keinen Urknall, aber durch die Beschleunigung einen sog. „big chill“, ein Auskühlen des Universums in der Zukunft. Es ist ein Beispiel, bei dem der negative Druck (siehe (3.43)), bewirkt durch die kosmologische Konstante, zu einem beschleunigt expandierenden Universum führt.

Es gibt eine Vielzahl von Modellvarianten je nach Kombination der Parameter $\Omega_{m,o}$, $\Omega_{r,o}$ und $\Omega_{\Lambda,o}$ zur Lösung der Friedmann-Gleichung (3.50). Be-

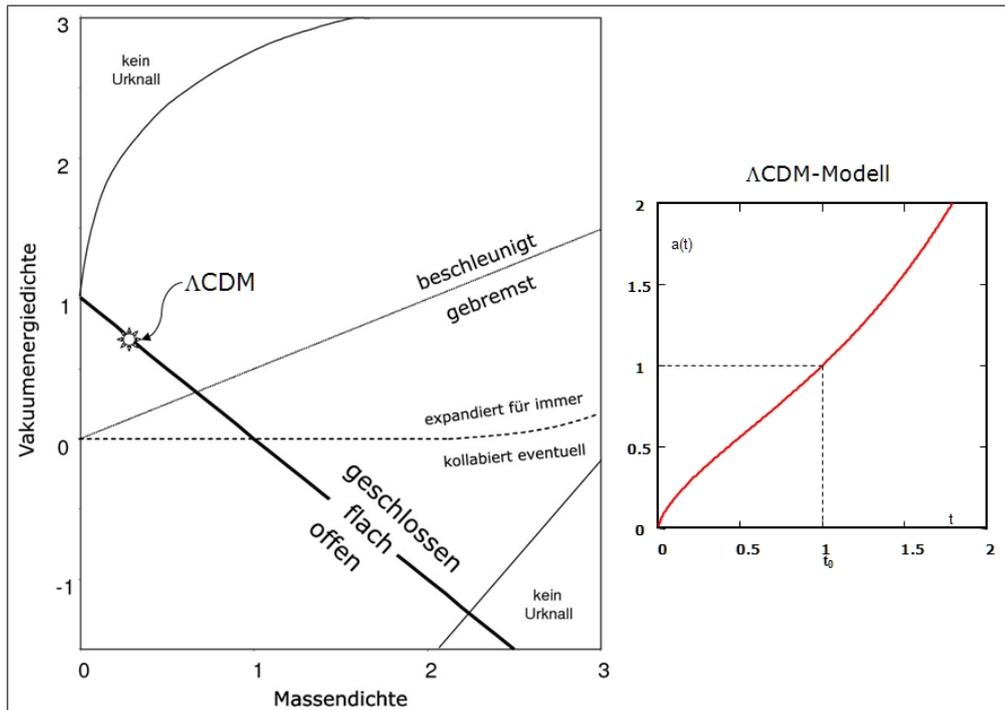


Abbildung 3.13: In dem linken Diagramm sind für die Parameterkombinationen von Massen-Energiedichte $\Omega_{m,o}$ und der Vakuumergiedichte $\Omega_{\Lambda,o}$ die Bereiche für Typen von Modell-Universen dargestellt (nach [45]); flache Universen existieren demnach nur für Kombinationen auf der stark schräg nach unten zeigende Linie, eben die Kombinationen ($\Omega_{m,o} + \Omega_{\Lambda,o} = 1$). Links von dieser Linie ergeben alle Kombinationen offene und rechts geschlossene Universen. Im rechten Diagramm ist beispielhaft die Abhängigkeit des Skalenparameters $a(t)$ von der Zeit t für das sog. Λ CDM-Modell abgebildet; das Modell, das gegenwärtig als Standard-Modell angesehen wird.

trachten wir nur ein materiedominiertes Universum (d.h. wir vernachlässigen $\Omega_{r,o}$) so kann man sich eine Übersicht über die Arten der Universen verschaffen,

die sich aus der Parameterkombination ergeben, indem man nach [45] in einem Diagramm $\Omega_{m,o}$ gegen $\Omega_{\Lambda,o}$ aufträgt und die Bereiche festlegt, die bestimmten Typen von Universen zugeordnet sind. Solch ein Diagramm ist im linken Teil der Abb. 3.13 dargestellt. Die starke schwarze schräg nach unten zeigende Gerade repräsentiert die Parameterkombination ($\Omega_{m,o} + \Omega_{\Lambda,o} = 1$), d.h. ein flaches offenes Universum; alle Parameterkombinationen links der Geraden bedeuten offenes und hyperbolisches, rechts davon ein geschlossenes sphärisches Universum (entsprechend (3.39)). Die Linie $\Omega_{\Lambda,o} = 0$, die allerdings für größere Werte von $\Omega_{m,o}$ leicht ansteigt, trennt die Bereiche, für die für größere Werte der Vakuumenergiedichte das zugehörige Universum für immer expandiert von denen, die eventuell kollabieren können. Die vom Punkt $\Omega_{\Lambda,o} = 0$ startende schräg nach oben führende Gerade trennt die Bereiche für beschleunigt (oben) von gebremst (unten) expandierenden Modelle. Die Modelle schließlich, die Parameterkombinationen in der oberen linken oder unteren rechten Ecke aufweisen, zeigen keinen Urknall.

Der Stern auf der Geraden der Modelle flacher Universen zeigt die Parameterkombination $\Omega_{m,o} = 0,3$ und $\Omega_{\Lambda,o} = 0,7$; das sind die Werte, von denen man momentan davon ausgeht, daß sie das „Standardmodell der Kosmologie“, das sog. Λ CDM-Modell (Λ cold dark matter), bestimmen.

Im Kapitel 4 werden wir im Detail auf dieses Modell eingehen und erläutern, wie man aufgrund astronomischer Messungen diese Werte bestimmt. Auf Grund der Parameterwerte muß es also ein Modell für ein flaches, beschleunigt expandierendes Universum sein. Im rechten Teil der Abb. 3.13 ist für dieses kosmologische Modell die Abhängigkeit der Skalenfaktors $a(t)$ von der Zeit dargestellt, wobei auch hier wieder für die heutige Zeit $t = t_0$ der Skalenfaktor $a(t_0)$ auf den Wert 1 normiert ist. Man kann deutlich erkennen, daß zunächst zwar die Expansion gebremst ist, aber zum halben Weltalter ($t \approx 0,5$) eine Beschleunigung eintritt, die auch weiterhin bestehen bleibt.

3.9 Weltlinien, Entfernungen und Horizonte

Unter Annahme der Robertson-Walker-Metrik hatten wir in Kap. 3.6 den „Eigenabstand“ L_p in Gleichung (3.21a) und die „Eigengeschwindigkeit“ V_p in Gleichung (3.21c) bestimmt. Letztere Beziehung ist das Hubble’sche Geschwindigkeits-Entfernungs-Gesetz. Die Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Gesetzmäßigkeiten war, daß wir uns im Zentrum ($r = 0$) befinden und radial in den Raum schauen ($d\Omega = 0$). Letzteres Gesetz wollen wir nochmals anführen:

$$V(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \cdot L(t) = H(t) \cdot L(t) \quad (3.51)$$

In der Robertson-Walker-Metrik haben alle Objekte im Raum definitionsgemäß zu einem bestimmten Zeitpunkt die gleiche Eigenzeit, d.h. für einen Zeitpunkt $t = t_x$ ist $L(t_x)$ die Entfernung („Eigenabstand“) eines Objektes von uns aus gesehen im Raum – Harrison ([24], S. 281) nennt diesen Raum „world map“ –, $V(t_x)$ ist die entsprechende Fluchtgeschwindigkeit bei der

Hubble-Funktion $H(t_x)$. Weiterhin hatten wir in Kap. 3.6 die Beziehung für die Rotverschiebung z entsprechend (3.23) abgeleitet:

$$z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (3.52)$$

Dabei bedeutet $a(t_0)$ den Skalenfaktor zum Zeitpunkt $t = t_0 = \text{heute}$ und $a(t_e)$ den Skalenfaktor zum Zeitpunkt der Emission des Lichtes. Mit dieser Betrachtungsweise hat man quasi eine absolute Zeit wieder eingeführt, die EINSTEIN mit seiner Speziellen Relativitätstheorie aus der Welt geschafft hatte.

Die Robertson-Walker-Metrik, wie in (3.20a) definiert, erlaubt es, den „Eigenabstand“ L_p mit dem Abstand zum Zeitpunkt der Emission des Lichtes t_e in Beziehung zu setzen – Harrison [24] nennt ihn den Abstand im „world picture“. Licht breitet sich auf einer Null-Geodäten aus, d.h. $ds = 0$, womit wir unter den gleichen Voraussetzungen wie oben ($d\Omega = 0$) aus (3.20a) $c \cdot dt = \pm a(t) \cdot dr$ erhalten. Dabei bezieht sich das positive Vorzeichen auf den Vorwärtslichtkegel, das negative auf den Rückwärtslichtkegel. Die Koordinatendistanz r auf dem Rückwärtslichtkegel („world picture“) ist damit gegeben durch

$$r = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

wobei t_e die Zeit der Emission des Lichtes und t_0 den gegenwärtigen Zeitpunkt bedeutet. Damit ist die heutige (metrische) Entfernung zu der Lichtquelle zum (gegenwärtigen) Zeitpunkt t_0

$$L_p = a(t_0) \cdot r = c \cdot a(t_0) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (3.53a)$$

und die Distanz zum Zeitpunkt der Emission L_e

$$L_e(t_e) = a(t_e) \cdot r = c \cdot a(t_e) \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} \cdot L_p \quad (3.53b)$$

oder, wenn wir die Beziehung (3.52) berücksichtigen

$$L_p = (z + 1) \cdot L_e \quad (3.53c)$$

Die bisherigen Gleichungen in diesem Kapitel beschreiben Zusammenhänge in einem expandierenden oder kontrahierenden Raum, sie sind Ausdruck der Geometrie. Um konkrete Aussagen zu machen, speziell was die metrischen Entfernungen L_p und L_e anbetreffen, muß man aber wissen, wie sich der Skalenfaktor $a(t)$ mit der Zeit ändert, d.h. man muß ein kosmologisches Modell zugrunde legen, wie in Kap. 3.7 beschrieben.

In der Folge betrachten wir als einfachen Fall die Verhältnisse des Einstein-de Sitter Modells, wie er im Kapitel 3.8.1 beschrieben wurde. Dieses kosmologische Modell bietet sich wegen seiner Einfachheit an, die Zusammenhänge zwischen den interessierenden Größen $L(t)$, L_p und L_e in einem expandierenden

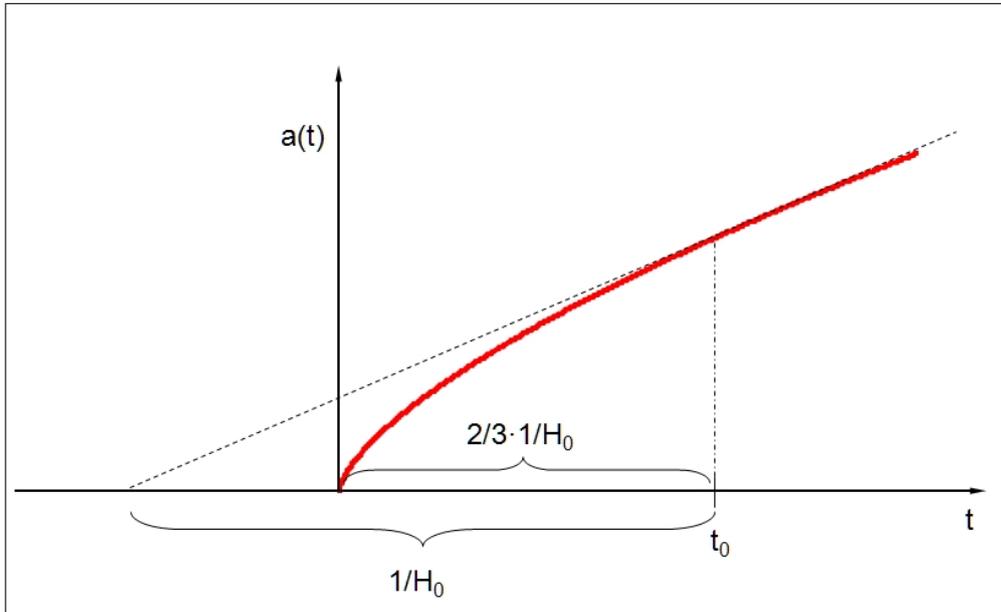


Abbildung 3.14: Der Skalenfaktor a als Funktion der Zeit t für das Einstein-de Sitter Modell.

Universum zu untersuchen. Die Abb. 3.14 – wir führen hier der Vollständigkeit halber die Abbildung aus 3.8.1 nochmals an – zeigt den Verlauf des Skalenfaktors $a(t)$ über die Zeit. Der Zeitpunkt t_0 ist der Zeitpunkt „heute“. H_0 ist die Hubble-Konstante. Im Kap. 3.8.1 wurde die Zeit t_0 , die seit dem Urknall vergangen ist, bestimmt – Gleichung (3.46e) – und entsprechend in Abb. 3.14 dargestellt. Zur Erinnerung hier nochmals zwei Größen, die wir im Folgenden häufig nutzen werden. Zum einen die Hubble-Periode $t_H(t)$, die in (3.46f) definiert wurde:

$$t_H(t) = \frac{1}{H(t)}$$

als das Alter eines gleichmäßig expandierenden Universums, dessen Expansionsrate konstant gleich $H(t)$ ist, und zum anderen die Hubble-Länge $L_H(t)$ aus (3.14c), als die Distanz, bei der zum Zeitpunkt t die (Flucht-) Geschwindigkeit gerade gleich der Lichtgeschwindigkeit c ist:

$$L_H(t) = \frac{c}{H(t)}. \quad (3.54)$$

Das Raumgebiet mit dem Radius der Hubble-Länge $L_H(t)$ wird, wie wir in Kap. 3.5 bereits beschrieben haben, als Hubble-Sphäre bezeichnet; Objekte innerhalb dieser Sphäre bewegen sich mit Unterlichtgeschwindigkeit, auf der Grenze mit Lichtgeschwindigkeit und jenseits mit Überlichtgeschwindigkeit. Diese Zusammenhänge gelten allgemein, sind also unabhängig von einem speziellen kosmologischen Modell. Die Geschwindigkeit $dL_H(t)/dt$ aber, mit der die Hubble-Sphäre selbst expandiert, hängt sehr wohl vom Modell ab. Nennen

wir diese Geschwindigkeit $U_H(t)$, dann läßt sie sich einfach bestimmen:

$$U_H = \frac{dL_H(t)}{dt} = -\frac{c}{H^2(t)} \frac{dH(t)}{dt} = -\frac{c a^2(t)}{\dot{a}^2(t)} \frac{d \dot{a}(t)}{dt}.$$

Differentiation mit der Kettenregel und Berücksichtigung der Bremsfunktion $q(t)$ aus Gleichung (3.41) auf Seite 92 ergibt schließlich für die Geschwindigkeit $U_H(t)$:

$$U_H(t) = c(1 + q(t)). \quad (3.55)$$

Galaxien auf dem Rand der Hubble-Sphäre bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit und werden von ihr mit einer Relativgeschwindigkeit

$$U_H - c = cq$$

überholt. In allen Universen mit gebremster Expansion ($q > 0$) expandiert die Hubble-Sphäre schneller als das Universum als ganzes und sie enthält eine immer größer werdende Anzahl von Galaxien. Im Fall beschleunigter Expansion ($q < 0$) expandiert die Hubble-Sphäre langsamer als das Universum und enthält eine abnehmende Zahl von Galaxien.

Kommen wir auf den Spezialfall des Einstein-de Sitter Modells zurück, so können wir aus dem zeitlichen Verlauf des Skalenfaktors $a(t)$ in diesem Fall gemäß (3.46c) für die relevanten Größen schreiben:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0) \cdot \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} \\ t_H(t) &= \frac{3}{2} \cdot t \\ L_H(t) &= \frac{3}{2} \cdot c \cdot t \end{aligned} \quad (3.56)$$

Dabei bedeutet t_0 den heutigen Zeitpunkt. Damit können wir nun die Entfernung $L_p(t_e)$ – die Eigenenabstand – von unserem Standort aus berechnen, die eine Galaxie heute hat und von der das uns heute erreichende Licht zum Zeitpunkt t_e ausgesandt wurde. Mit (3.53a) und (3.56) ergibt sich die damit die Eigenabstand zu:

$$L_p(t_e) = c \cdot \int_{t_e}^{t_0} \left(\frac{\tau}{t_0}\right)^{-2/3} d\tau = 3 \cdot c \cdot t_0 \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3}\right] = 2 \cdot L_{H_0} \cdot \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3}\right]. \quad (3.57)$$

Mit der Beziehung für den Eigenabstand und der Formel (3.53b), können wir nun auch die Entfernung der Galaxie zum Zeitpunkt der Emission des Lichtes $L_e(t_e)$ bestimmen:

$$L_e(t_e) = \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{2/3} \cdot L_p(t_e) = 2 \cdot L_{H_0} \cdot \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{2/3} \cdot \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3}\right]. \quad (3.58)$$

Beide Beziehungen sind von großer Bedeutung für das Verständnis der räumlichen und zeitlichen Zusammenhänge in unserem Universum. Astronomische Beobachtung und Messung bedeutet ja sowohl einen Blick in den Raum

als auch in die Vergangenheit. Entfernungen können, abgesehen von nahen Distanzen, nur aus dem emittierten Licht der kosmischen Objekte gewonnen werden; wie das geschieht, werden wir später erläutern. Das bedeutet, daß wir, um uns ein räumliches Bild von der heutigen Struktur des Universums machen zu können, alle gemessenen Entfernungen – die $L_e(t_e)$ – auf den (heutigen) Eigenabstand $L_p(t_0)$ umrechnen müssen. Um das alles anschaulich zu machen,

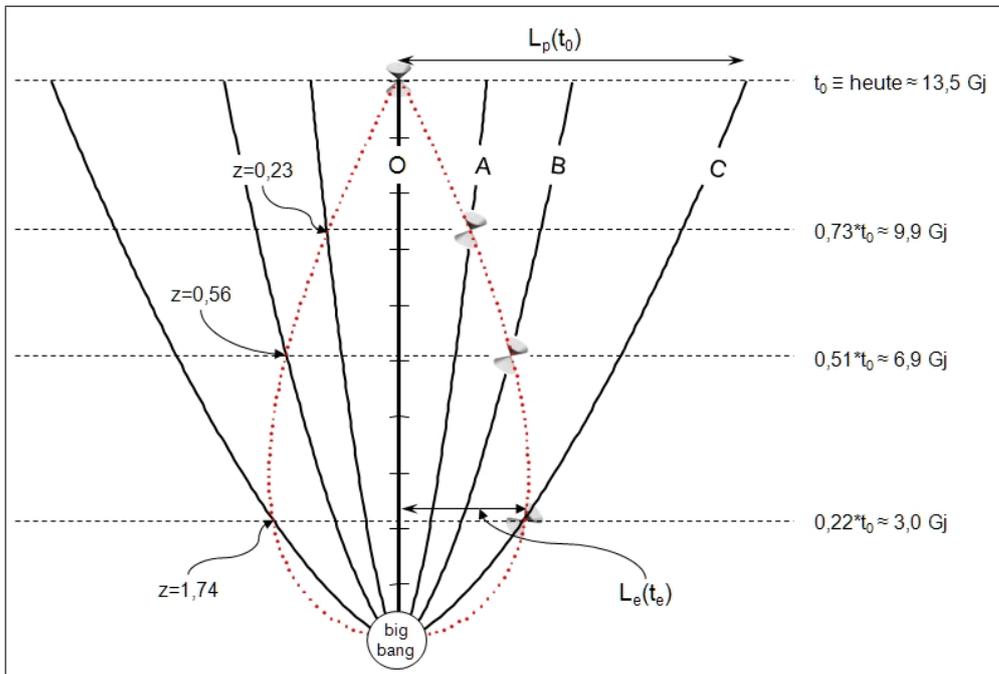


Abbildung 3.15: Schematische Darstellung von Weltlinien verschiedener Objekte im Einstein-de Sitter Modell. Die zentrale senkrechte Linie mit der Bezeichnung O bedeute „unsere“ Weltlinie, die anderen – A,B und C – sind die von z.B. Galaxien, die sich heute in unterschiedlichen Entfernungen von uns befinden. Die punktierte Kurve stellt unseren Rückwärtslichtkegel dar (Erläuterung im Text).

bedient man sich eines Raum-Zeit-Diagrammes, wie wir es schon öfters genutzt haben. In der Abb. 3.15 sind die Weltlinien von sieben Galaxien dargestellt, die in dem expandierenden Raum ruhen. Die Weltlinie, die mit O bezeichnet ist, sei unsere Galaxie, A,B und C seien weiter entfernte Galaxien (aus Symmetriegründen wurden links in entgegengesetzter Richtung ebenfalls drei Galaxien eingezeichnet). Die Weltlinien $L_p(t)$ der verschiedenen Galaxien wurden nach der Formel (3.57) berechnet, wobei für die einzelnen Galaxien unterschiedliche Werte für L_{H_0} eingesetzt wurden. Die tropfenförmige punktierte Kurve stellt den Rückwärtslichtkegel unserer Galaxie – des Beobachters – zum heutigen Zeitpunkt dar. Sein Kurvenverlauf ergibt sich aus der Formel (3.58), denn das Licht, das in der Entfernung $L_e(t)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt t ausgesandt wird, erreicht uns gerade zum heutigen Zeitpunkt. So erkennen wir aus der Abb. 3.15, daß die Galaxie C, die wir heute beobachten, ihr Licht vor etwa 10,5 Milliarden Jahren⁸ ($= 0,22 t_0$) in der damaligen Entfernung $L_e(t_e)$ von

⁸Die Zeitangaben sind nicht ganz konsistent; die Weltlinien wurden mit dem Einstein-de

uns ausgesandt hat; heute hat sie den Eigenabstand $L_p(t_0)$. Analoges gilt für die anderen Galaxien.

Wir haben bisher die Weltlinien der Galaxien und den zugehörigen Rückwärtslichtkegel mit Hilfe des einfachen Einstein-de Sitter Modelles berechnet. Für die anderen kosmologischen Modelle gilt natürlich analoges, mit dem Unterschied, daß die Formeln für die Entfernungen und den Rückwärtslichtkegel komplizierter werden und meist nicht mehr geschlossen mathematisch dargestellt werden können. Für das Λ CDM-Modell zum Beispiel, dessen zeitlicher Verlauf des Skalenfaktors im rechten Teil der Abb. 3.13 dargestellt ist, werden die Weltlinien der Galaxien tulpenförmig auseinander gehen und die Kurve des Rückwärtslichtkegels leicht gegenüber der Abb. 3.15 modifiziert sein; am Prinzip ändert sich aber nichts.

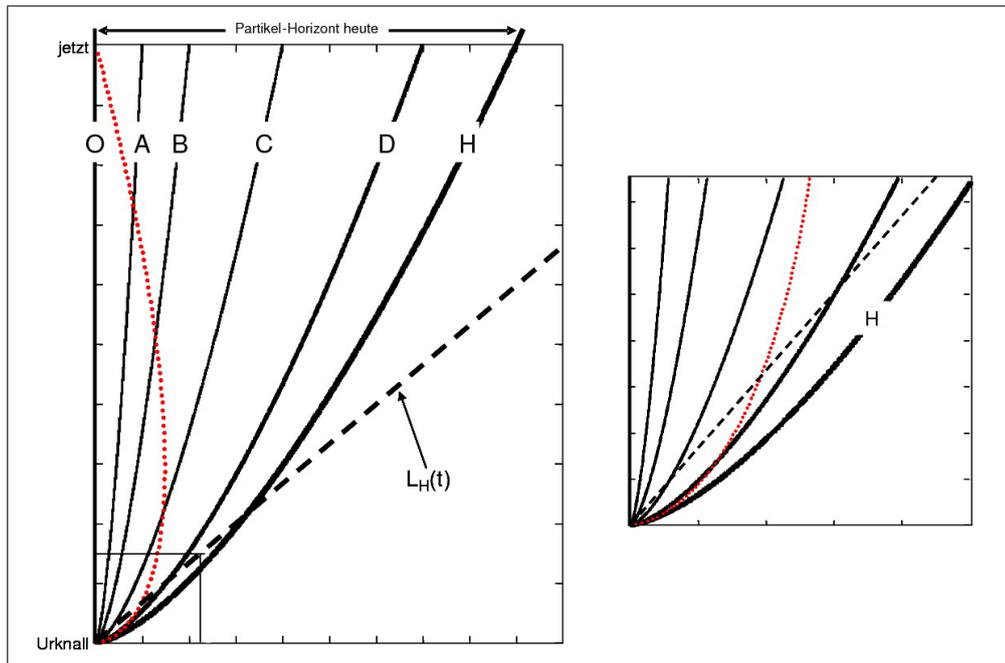


Abbildung 3.16: Schematische Darstellung von Weltlinien verschiedener Objekte im Einstein-de Sitter Modell. Die zentrale senkrechte Linie mit der Bezeichnung O bedeute „unsere“ Weltlinie, die anderen – A,B,C und D – sind die von z.B. Galaxien, die sich heute in unterschiedlichen Entfernungen von uns befinden. Die punktierte Kurve stellt unseren Rückwärtslichtkegel dar. Die Weltlinie H ist der Partikel-Horizont zum jetzigen Zeitpunkt und die gestrichelte Linie ist die Hubble-Länge in Abhängigkeit von der Zeit (Erläuterung im Text).

Betrachten wir Weltlinien von Galaxien, die eine immer größere Eigenabstand von uns haben, so kommen wir schließlich zu einer, die unseren Rückwärtslichtkegel nicht mehr schneidet, wie die der Galaxien A,B oder C der Abb. 3.15, sondern ihn gerade nicht mehr berühren. Im linken Teil der Abb. 3.16

Sitter Modell berechnet, die Zahlen, die den Zeitpunkt für $L_e(t_e)$ angeben, beziehen sich aber auf ein Weltalter von 13,5 GJ, das Ergebnis des Standardmodells.

stellt die Weltlinie H diesen Fall für den jetzigen Zeitpunkt dar⁹. Diese Weltlinie H stellt die Grenze der Objekte dar die wir zum jetzigen Zeitpunkt überhaupt beobachten können; sie wird deshalb als *Partikel-Horizont* bezeichnet. Dieser Begriff wurde zum ersten mal 1956 von W. RINDLER [51] eingeführt; „Partikel“ soll dabei auf ein Objekt hinweisen, das eine lange Lebensdauer hat und demzufolge in einem Raum-Zeit-Diagramm durch eine Weltlinie repräsentiert wird. In unserem Zusammenhang wären das z.B. Sterne oder Galaxien, die durch ihr Leuchten beobachtet werden können. RINDLER führte darüber hinaus den Begriff des *Event-Horizontes* ein, als Grenzlinie im Raum-Zeit-Diagramm, jenseits der wir grundsätzlich keine singulären Ereignisse – in unserem Fall wären das Supernovae – beobachten können. Event-Horizonte treten nur in kosmologischen Modellen für Universen mit endlicher Lebensdauer auf, weswegen wir dieses Thema nicht weiter vertiefen wollen. Für Interessierte sei in diesem Zusammenhang auf die eingehende Darstellung bei Harrison verwiesen [24]. Alle Galaxien links des Partikel-Horizontes, liegen zum jetzigen Zeitpunkt (zumindest theoretisch) innerhalb des beobachtbaren Universums und Galaxien mit einer Distanz größer als der Partikel-Horizont heute – siehe den linken Teil der Abb. 3.16 sind grundsätzlich nicht beobachtbar. Zu einem späteren Zeitpunkt hat sich der Partikel-Horizont vergrößert und ein immer größer werdender Teil des Universums ist beobachtbar. Er entfernt sich vom Beobachter mit Lichtgeschwindigkeit mit der Folge, daß selbst in einem statischen Universum der beobachtbare Teil des Universums tatsächlich expandiert. Es läßt sich zeigen, daß sich in allen Universen, in denen das kosmologische Prinzip gilt, seien sie statisch oder nichtstatisch, expandierend oder kollabierend, der Partikel-Horizont relativ zu den Galaxien mit Lichtgeschwindigkeit entfernt.

In dem Raum-Zeit-Diagramm im linken Teil der Abb. 3.16 ist mit der gestrichelten Geraden die Weltlinie der Hubble-Länge $L_H(t)$ dargestellt¹⁰. Wie erinnerlich, stellt die Hubble-Länge die Distanz dar, bei der die dort befindlichen Galaxien sich mit Lichtgeschwindigkeit von uns entfernen; die Hubble-Länge ist demnach der Radius der Hubble-Sphäre. Jenseits dieser Sphäre entfernen sich die Galaxien, wie schon erwähnt, mit Überlichtgeschwindigkeit und sind demnach nicht beobachtbar. Daß das aber nicht grundsätzlich so sein muß, können wir uns am Beispiel des rechten Raum-Zeit-Diagrammes der Abb. 3.16 klarmachen. Es stellt einen vergrößerten Ausschnitt des linken Teils der Abbildung dar – durch das Rechteck bei dem Koordinatenursprung symbolisiert. Dort wird deutlich, daß z.B. sich die Weltlinie der Galaxie D nach dem Urknall vorrangig links des Partikel-Horizontes befindet, also für uns heute sichtbar ist, aber zu einer ganz frühen Zeit kurz nach dem Urknall für eine bestimmte Dauer rechts der Hubble-Länge. Das bedeutet, daß sich diese Galaxie in dieser frühen Zeit mit Überlichtgeschwindigkeit von uns entfernt hat, aber trotzdem erreicht uns ihr Licht. Die von dieser Galaxie zu dieser

⁹Es wird hier der Übersichtlichkeit halber nur die positive „Raumseite“ des Raum-Zeitdiagrammes dargestellt.

¹⁰Daß die Weltlinie der Hubble-Länge eine Gerade ist, gilt nur für das hier zugrunde liegende Einstein-de Sitter Modell; in anderen kosmologischen Modellen hat die Weltlinie natürlich eine andere Kurvenform!

frühen Zeit ausgesandten Photonen bewegen sich (entlang des Lichtkegels) mit Lichtgeschwindigkeit und werden dann von der schneller expandierenden Hubble-Sphäre – siehe (3.55) – überholt.

Es soll noch eine prinzipielle Bemerkung zu dem Thema „Entfernung“ gemacht werden. Vielfach, insbesondere in populärwissenschaftlichen Veröffentlichungen, werden Distanzen von weit entfernten Galaxien oder Quasaren angegeben, ohne genau zu sagen, ob es sich dabei um die Eigenabstand L_p oder um die Entfernung zum Zeitpunkt der Emission des Lichtes L_e handelt. Der Unterschied beider Entfernungen wird wegen (3.53c) umso größer je größer die Rotverschiebung ist. Außerdem müßte bei einer metrischen Entfernungsangabe das zugrunde gelegte kosmologische Modell genannt werden. Wir werden im nächsten Kapitel nochmals darauf zurückkommen.

3.10 Beobachtbare Größen

Die im letzten Kapitel abgeleiteten Beziehungen sind zwar in der Theorie sinnvoll und richtig, in der Praxis aber nicht nutzbar, denn mit der Größe t kann der Astronom nichts anfangen. Was gemessen wird, ist einzig und alleine die Rotverschiebung z und die scheinbare Helligkeit m , aus der dann die Entfernung zumindest im Prinzip abgeleitet werden kann. Wir müssen also alle bisherigen Größen, wie die Entfernungen und Geschwindigkeiten, in Abhängigkeit von z herleiten. In der Abb. 3.15 wurde schon mal die Rotverschiebung, unter der die Galaxien beobachtet werden, an dem Rückwärtslichtkegel angegeben (um die Grafik nicht zu überlasten sind die Werte auf der symmetrischen linken Seite der Weltlinien eingezeichnet).

Bevor wir aber den allgemeinen Fall betrachten, bestimmen wir zunächst die relevanten Größen in dem einfacheren Fall des Einstein-de Sitter Modells, auf Grundlage der bisher dafür abgeleiteten Formeln. Aus der Beziehung für die Rotverschiebung (3.52) und (3.56) erhalten wir die wichtige Beziehung

$$\frac{1}{1+z} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$$

Diese Beziehung eingesetzt in in obige Gleichungen für die Entfernungen $L_p(t)$ und $L_e(t)$, ergibt die entsprechenden Gleichungen in Abhängigkeit von z :

$$\begin{aligned} L_p(z) &= 2 \cdot L_{H_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) \\ L_e(z) &= \frac{2 \cdot L_{H_0}}{1+z} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Zur Veranschaulichung dieser Entfernungen, können wir auf die Abb. 3.15 zurückgreifen. Die Galaxie B zum Beispiel sehen wir mit einer Rotverschiebung $z = 0,56$; ihre Entfernung heute $L_p(t = t_0)$ ist gegeben durch $L_p(z = 0,56)$ und entsprechend die Entfernung zum Zeitpunkt der Emission: $L_e(t = 0,51 \cdot t_0)$ wird zu $L_e(z = 0,56)$.

Zur Berechnung der Fluchtgeschwindigkeit $V_p(t_0)$ zum heutigen Zeitpunkt greifen wir auf das Geschwindigkeits-Entfernungs-Gesetz (3.51) zurück und dividieren beide Seiten der Gleichung durch die Lichtgeschwindigkeit c :

$$\frac{V_p(t_0)}{c} = \frac{H(t_0)}{c} L_p(t_0)$$

und mit (3.54) ergibt sich

$$\frac{V_p(t_0)}{c} = \frac{L_p(t_0)}{L_H(t_0)}$$

Mit dieser Gleichung für $V_p(t_0)$ erhalten wir mit (3.59) die Gleichungen für $V_p(z)$ für das Einstein-de Sitter Modell:

$$V_p(z) = 2c \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right). \quad (3.60)$$

Daraus ergibt sich, daß die Objekte im Universum, die eine Rotverschiebung von $z \geq 3$ aufweisen, sich zum heutigen Zeitpunkt mit einer Geschwindigkeit von uns entfernen, die größer oder gleich der Lichtgeschwindigkeit ist; d.h. sie befinden sich, wie man leicht aus (3.59) ersehen kann, auf oder jenseits der Hubble-Sphäre.

Die Fluchtgeschwindigkeit zum Zeitpunkt der Emission des Lichtes bestimmen wir analog zu dem, was für $L_p(t_0)$ berechnet wurde:

$$\frac{V_e(t_e)}{c} = \frac{H(t_e)}{c} L_e(t_e) = \frac{L(t_e)}{L_H(t_e)}$$

mit (3.56) erhalten wir daraus

$$\frac{V_e(t_e)}{c} = \frac{2}{3 c t_0} \left(\frac{t_0}{t_e} \right) L_e(t_e)$$

und schließlich mit (3.52)

$$V_e(z) = \frac{c}{L_{H_0}} (z+1)^{3/2} \cdot L_e(z)$$

L_{H_0} ist dabei die Hubble-Zeit L_H zum Zeitpunkt $t = 0$. Nachdem wir die Entfernung der Lichtquelle $L_e(z)$ zum Zeitpunkt der Emission eingesetzt haben, ergibt sich für die gesuchte Fluchtgeschwindigkeit

$$V_e(z) = 2c(\sqrt{1+z} - 1). \quad (3.61)$$

Aus dieser Gleichung kann man sofort nachvollziehen, daß Objekte im Universum, die eine Rotverschiebung von $z \geq 1,25$ aufweisen, zum Zeitpunkt ihrer Emission eine Fluchtgeschwindigkeit $V_e(z)$ (relativ zu uns) größer oder gleich der Lichtgeschwindigkeit hatten.

Mit Hilfe der Beziehungen (3.56) und (3.52) können wir den Zeitpunkt t_e der Emission des Lichtes bestimmen (t_0 ist der heutige Zeitpunkt)

$$\frac{t_e}{t_0} = \frac{1}{(1+z)^{3/2}}$$

oder mit (3.56)

$$t_e = \frac{2}{3} t_{H_0} \frac{1}{(1+z)^{3/2}}.$$

t_{H_0} ist auch hier t_H zum Zeitpunkt $t = 0$. Damit ergibt sich die Zeit $t_0 - t_e$, die seit der Emission des Lichtes, das uns heute erreicht, vergangen ist (lookback time), zu

$$t_0 - t_e = \frac{2}{3} t_{H_0} \left(1 - \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right). \quad (3.62)$$

Diese zuletzt abgeleiteten Gleichungen gelten nur für das Einstein-de Sitter Kosmos. Für die anderen denkbaren kosmologischen Modelle sind die Formeln wesentlich komplizierter und nicht geschlossen darstellbar. Zumindest für die Hubble-Funktion $H(t)$ werden wir im Folgenden die Transformation auf $H(z)$ angeben können.

Die bisher betrachteten Formeln der kosmologischen Modelle sind in Abhängigkeit von der Zeit t formuliert, eine Größe, die ja nicht direkt beobachtbar ist. Ziel muß es sein, die Formeln der Modelle nicht in t sondern in z auszudrücken (das ist teilweise oben für den Einstein-de Sitter Kosmos schon geschehen). Wenn wir den Zusammenhang zwischen Expansion und der Rotverschiebung z haben, dann kann auch die Beziehung zwischen absoluter und scheinbarer Helligkeit weit entfernter Objekte hergeleitet werden. Zu diesem Zweck greifen wir auf die in Kap. 3.7 abgeleiteten allgemeinen Friedmann-Gleichungen (3.38a) und (3.38b) zurück und führen sie der Vollständigkeit halber hier nochmals auf, wobei wir uns auf das materiedominierte Universum beschränken und damit $\Omega_{r,0}$ vernachlässigen:

$$\frac{H^2(a(t))}{H_0^2} = \frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t)} - \frac{\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1}{a^2(t)} + \Omega_{\Lambda,0} \quad (3.63a)$$

und

$$\frac{\dot{a}(t)}{H_0} = \left[\frac{\Omega_{m,0}}{a(t)} - (\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1) + a^2(t)\Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2}. \quad (3.63b)$$

Wie allgemein üblich, setzen wir für den heutigen Zeitpunkt $a(t_0) = 1$. Mit der Formel $a(t) = \frac{1}{1+z}$ für die kosmologische Rotverschiebung können wir die linke Seite obiger Gleichung umformen:

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{da}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{(1+z)^2} \cdot \frac{dz}{dt} \quad (3.64a)$$

weiterhin gilt mit (3.24)

$$dt = -\frac{dz}{(1+z)H(z)} \quad (3.64b)$$

und damit schließlich für die linke Seite der Gleichung (3.63b)

$$\frac{\dot{a}}{H_0} = \frac{H(z)}{H_0} \cdot \frac{1}{(1+z)} \quad (3.64c)$$

Die Friedmann-Gleichung in Abhängigkeit der Rotverschiebung z schreibt sich dann

$$H(z) = H_0 \left[(1+z)^3 \Omega_{m,0} - (1+z)^2 (\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} - 1) + \Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2}. \quad (3.65)$$

Der Eigenabstand L_p einer Galaxie, die wir mit der Rotverschiebung z beobachten, können wir nun mit (3.65) aus der Beziehung (3.53a) unter zu Hilfenahme von (3.64) allgemein formulieren:

$$L_p(z) = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.66a)$$

Die Entfernung der Galaxie zum Zeitpunkt der Emission des Lichtes $L_e(z)$ erhalten wir aus (3.53c):

$$L_e(z) = \frac{c}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.66b)$$

Analog zu dem für das Einstein-de Sitter Modell gesagte, läßt sich aus dem Geschwindigkeits-Entfernungs-Gesetz die Fluchtgeschwindigkeit $V_p(z)$ zum heutigen Zeitpunkt bestimmen zu:

$$V_p(z) = H_0 \cdot L_p(z) = c \cdot H_0 \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.67a)$$

In gleicher Weise leiten wir die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt der Emission $V_e(z)$ ab:

$$V_e(z) = H(z) \cdot L_e(z) = \frac{c \cdot H(z)}{(1+z)} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (3.67b)$$

Für das Einstein-de Sitter Modell hatten wir oben die z -Werte berechnet, an denen die Fluchtgeschwindigkeiten $V_p(z)$ und $V_e(z)$ gerade den Wert der Lichtgeschwindigkeit annehmen. Wie nicht anders zu erwarten, sind diese Größen für ein realistischeres kosmologisches Modell verschieden. Für das in Kap. 4.1 näher beschriebene Standardmodell der Kosmologie ist z.B. $V_e(z)$ für Werte von $z \geq 1,6054$ und $V_p(z)$ für Werte von $z \geq 1,4563$ größer oder gleich der Lichtgeschwindigkeit¹¹. In dem Einstein-de Sitter Modell war der entsprechende z -Wert für V_p wesentlich größer als der für V_e ; im Fall des Standardmodells der Kosmologie ist es gerade umgekehrt. Der Grund liegt darin, daß bei letzterem eine beschleunigte Expansion des Universums stattfindet.

Auch die lookback time $t_0 - t_e$, die Zeit, die seit Emission des Lichtes vergangen ist, läßt sich mit (3.64 b) für einen beliebigen Wert von z berechnen zu:

$$t_0 - t_e = \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')H(z')} \quad (3.68a)$$

¹¹Hier wurde ein flaches Universum und die Werte für $\Omega_{m,0} = 0,3$, für $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$ und für $H_0 = 72$ angenommen.

oder auch die Zeitspanne t_0 , die seit dem Urknall vergangen ist,

$$t_0 = \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)H(z)}. \quad (3.68b)$$

Setzen wir in (3.68b) die in dem Λ CDM-Modell allgemein favorisierten Werte für $(\Omega_{m,0}; \Omega_{\Lambda,0}) = (0,3; 0,7)$ und für $H_0 = 72 \pm 7$ ein, so erhalten wir einen Wert für das Weltalter von $\approx 13,2 \pm 1,2$ Milliarden Jahren.

In der klassischen Astronomie kann man bei bekannter Leuchtkraft L_\star eines Objektes (= Energie in Watt, die von der gesamten Oberfläche des Objektes abgestrahlt wird) auf seine geometrische Entfernung L schließen nach der Beziehung (siehe z.B. [61])

$$\Phi = \frac{L_\star}{4\pi L^2}$$

Wobei Φ der (meßbare) Strahlungsstrom, gemessen in W m^{-2} außerhalb der Erdatmosphäre, und L die gesuchte Entfernung ist. Diese Beziehung gilt streng genommen nur im stationären euklidischen Raum. In der Kosmologie der allgemeinen Relativitätstheorie gelten diese Zusammenhänge nicht mehr uneingeschränkt, da sich der Raum permanent ausdehnt und dadurch die abgestrahlte Energie „verdünnt“ wird.

Was wir bei einem kosmologischen Modell aber beobachten, ist ein geänderter Strahlungsstrom Φ_0 (bezogen auf den heutigen Zeitpunkt t_0), eine durch Expansion/Kontraktion geänderte Leuchtkraft $L_{\star,0}$ sowie eine Entfernung L_p , die zum jetzigen Zeitpunkt t_0 gilt,

$$\Phi_0 = \frac{L_{\star,0}}{4\pi (L_p(t_0))^2} \quad (3.69)$$

Hat man in ihrer Leuchtkraft bekannte Objekte, sog. Standardkerzen wie z.B. Cepheiden oder Supernovae vom Typ 1a, so möchte man die originale Leuchtkraft L_\star mit dem heute gemessenen Strahlungsstrom Φ_0 in Verbindung bringen über folgende Beziehung

$$\Phi_0 = \frac{L_\star}{4\pi (L_{lum})^2} \quad (3.70)$$

L_{lum} ist dabei per definitionem die *Leuchtkraftentfernung* (engl.: luminosity distance). Zum Zeitpunkt der Emission des Lichtes t_e verteilte sich die Leuchtkraft L_\star des Objektes auf eine Kugel der Fläche $4\pi(L_e)^2$ (L_e ist die Entfernung Erde–Objekt zum Zeitpunkt t_e). Durch die Expansion des Raumes bis zum heutigen Zeitpunkt t_0 hat sich aber der Strahlungsstrom durch drei Effekte „verdünnt“

1. Die Entfernung Erde–Objekt ist gemäß (3.53b) auf L_0 angewachsen

$$L_0 = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} L_e = (1+z)L_e$$

2. Die Leuchtkraft L_* (=Energie) des Objektes ist bis zum heutigen Zeitpunkt t_0 durch die Expansion „verdünnt“ (die emittierten Photonen sind über eine größere Fläche verteilt worden) entsprechend der Beziehung

$$L_{*,0} = \frac{L_*}{1+z}$$

3. durch die Rotverschiebung ist die Anzahl der pro Sekunde ankommenden Photonen um den Faktor $1/(1+z)$ reduziert.

Unter Berücksichtigung dieser drei Faktoren können wir für (3.69) nun schreiben:

$$\Phi_0 = \frac{L_*}{4\pi[(1+z)L_e]^2(1+z)^2}$$

Wenn wir diesen Ausdruck mit (3.70) vergleichen, erhalten wir die Beziehung für L_{lum} :

$$L_{lum} = (1+z)^2 L_e$$

Berücksichtigt man die Beziehung $L_0 = (1+z)L_e$ sowie, daß für die Bestimmung der heutigen Entfernung L_p (in der *world map*) eines Objektes mit der Rotverschiebung z (3.66a) gilt, so erhalten wir schließlich für die Leuchtkraftentfernung

$$L_{lum} = c \cdot (1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (3.71)$$

Berücksichtigen wir nicht die Expansion des Raumes als Ursache für die Fluchtgeschwindigkeiten der Galaxien sondern die ursprüngliche Idee, daß sie sich in einem statischen Raum voneinander entfernen, so können wir für die Abhängigkeit der Geschwindigkeit v von der Rotverschiebung z die Formel (3.10) für den relativistische Doppler-Effekt nutzen und mit dem Geschwindigkeits-Entfernungs-Gesetz aus (3.14b) die zugehörige Leuchtkraftentfernung $L_{lum}^{(SRT)}$ zum heutigen Zeitpunkt bestimmen zu

$$L_{lum}^{(SRT)} = L_H^{(heute)} \cdot \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \quad (3.72)$$

$L_H^{(heute)}$ ist dabei die in (3.14d) definierte Hubble-Länge zum heutigen Zeitpunkt.

Damit sind Größen gefunden, die es für Objekte bekannter absoluter Helligkeit M erlaubt, die gemessene Rotverschiebung z mit der scheinbaren Helligkeit m über den Distanzmodul $\mu(z)$ in Verbindung zu bringen

$$\mu(z) \equiv m - M = 5 \log_{10} L_{lum}(z) + 25 \quad (3.73)$$

Die Leuchtkraftentfernung L_{lum} muß dabei in Einheiten Megaparsec angegeben werden.

Die heutzutage genauesten Messungen an entfernten Galaxien können mit den Supernovae 1a als Standardkerzen durchgeführt werden. Man geht davon aus, daß alle diese Supernovae die gleiche absolute Helligkeit haben, zumindest aufgrund ihrer Lichtkurve darauf normiert werden können (Details

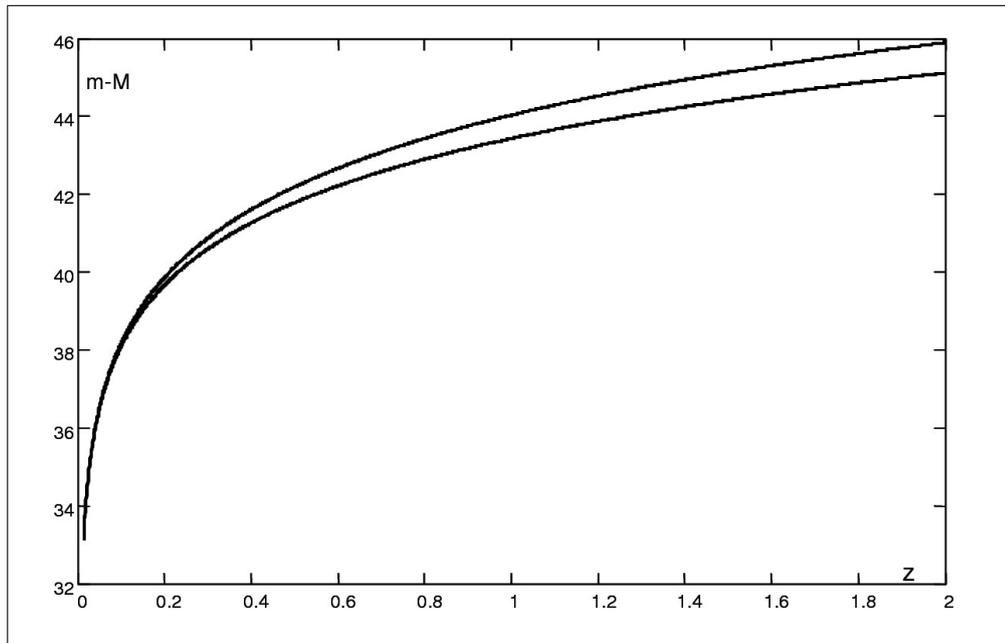


Abbildung 3.17: Abhängigkeit des Distanzmoduls μ von Supernovae vom Typ Ia in Abhängigkeit von ihrer Rotverschiebung z ; die absolute (maximale) Helligkeit der Supernova wurde mit $M = -19,3$ mag angenommen. Die untere Kurve entspricht dem Einstein-de Sitter Modell, die obere dem Λ CDM Modell.

siehe Kap. 4). Mit dieser bekannten absoluten Helligkeit läßt sich nun für verschiedene kosmologische Modelle die scheinbare Helligkeit dieser Objekte in Abhängigkeit ihrer Rotverschiebung berechnen. In der Abb. 3.17 sind für zwei extrem unterschiedliche Modelle – das Einstein-de Sitter: untere Kurve und das Λ CDM Modell: obere Kurve – die Verläufe dargestellt. Dabei wurde angenommen, daß die maximale absolute Helligkeit der Supernova Ia gleich $M = -19,3$ mag ist. Da die beiden Werte scheinbare Helligkeit m und Rotverschiebung z direkt gemessen werden können, dienen solche Kurven dazu zu überprüfen, welches Modell dem Universum am besten entsprechen könnte. Aus der Abb. 3.17 wird aber auch deutlich, wie gering der Unterschied beider Kurven ist, und daß eine Unterscheidung erst bei recht großen Werten von z überhaupt möglich ist. Auf die Messungen und deren Problematik werden wir im Kap. 4 zurückkommen.

Kapitel 4

Das Standardmodell der Kosmologie

„Es gibt keine rein beobachtbaren Fakten über Objekte am Himmel. Astronomische Messungen sind ausnahmslos Messungen von Phänomenen, die in einer Beobachtungsstation auf der Erde auftreten; nur mit Hilfe einer Theorie werden sie in Wissen über das Universum übersetzt...“

(übersetzt aus: Arthur Eddington: *The Expanding Universe*; 1933)

4.1 Beobachtende Kosmologie und Standardmodell

Bis zur Entdeckung der Expansion des Universums durch EDWIN HUBBLE im Jahr 1929 waren kosmologische Überlegungen rein auf die Theorie und außerdem auf einen ganz kleinen Kreis von Spezialisten beschränkt; in früheren Kapiteln haben wir über die Ergebnisse von EINSTEIN, DE SITTER, FRIEDMANN und LEMAÎTRE zu dem Thema berichtet (siehe Kap. 3).

Die Ergebnisse von HUBBLE kann man als die ersten Erfolge der beobachtenden Kosmologie bezeichnen. Der von ihm bestimmte Wert der Hubble-Konstanten H_0

$$H_0 = 500 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$$

(siehe (3.6a) auf Seite 68) erwies sich aber als viel zu groß, als daß er als realistisch akzeptiert werden konnte. Nimmt man nämlich an, daß die durch die Hubble-Konstante repräsentierte heutige Expansionsrate des Universums über alle Zeiten konstant war, so kann man daraus das Weltalter T_u berechnen:

$$T_u = \frac{1}{H_0} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ Jahre.}$$

Legt man aber das Einstein-de Sitter Modell des Universums zugrunde, so erhält man sogar einen noch kleineren Wert für das Weltalter (siehe Abb. 3.10 auf Seite 97). Diese etwa 2 Milliarden Jahre, die sich aus der Hubble-Konstante ergaben, war zur damaligen Zeit schon absolut unrealistisch, kannte man doch

bereits aus der Geologie Gestein mit einem Alter von über 4 Milliarden Jahre. Dadurch kam die Kosmologie bei Astronomen regelrecht in Verruf und wurde in den nächsten Jahrzehnten nur von Theoretiker und Mathematiker weiter voran gebracht, die die schon beschriebenen kosmologischen Modelle entwickelten. In der Astrophysik wurde zu dieser Zeit die Theorie der Sternentwicklung vorangetrieben und die Astronomen konzentrierten sich darauf, durch Beobachtungen diese theoretischen Voraussagen zu bestätigen. Erst 1955, als man feststellen mußte, daß es zwei unterschiedliche Arten von Cepheiden gibt und mit diesen Standardkerzen die nähere Umgebung unseres Universums neu vermessen konnte, wurde auch die Hubble-Konstante neu berechnet (siehe (3.7) auf Seite 69). Mit den deutlich niedrigeren Werten der Hubble-Konstanten

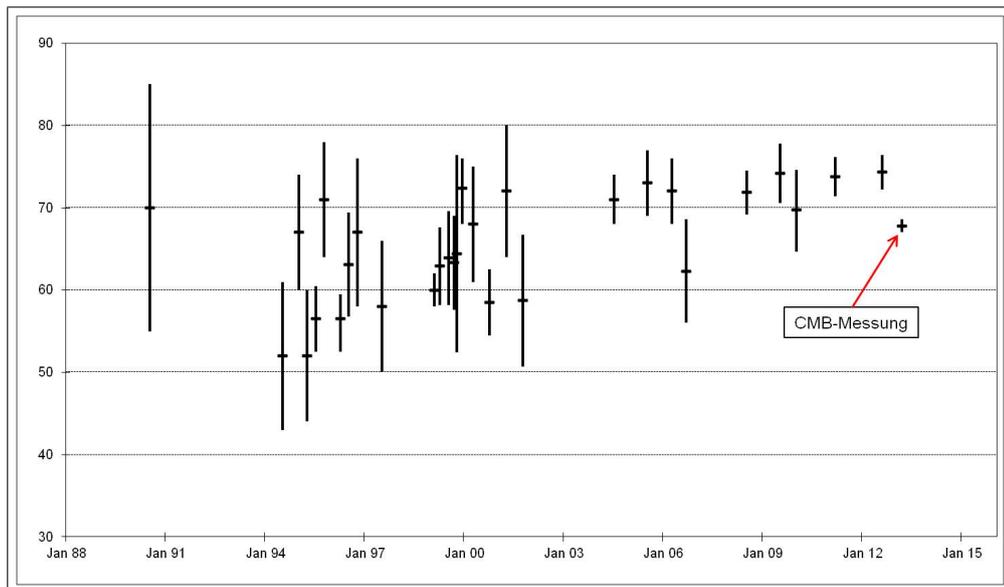


Abbildung 4.1: Meßergebnisse (aus [52], [50] und [38]) der Hubble-Konstante H_0 mit ihren Fehlerbalken, wie sie in den letzten zwanzig Jahren ermittelt wurden. Der bisher genaueste Wert für H_0 – als „CMB Messung“ bezeichnet – basiert auf der Analyse der Hintergrundstrahlung gemessen mit dem Satelliten PLANCK [2], während alle anderen aus der Rotverschiebung von fernen Galaxien oder Supernovae vom Typ 1a abgeleitet wurden.

kam nun das Weltalter in realistischere Größenordnungen und das Interesse an kosmologischen Beobachtungen wurde wieder geweckt. In der Folge, bis zum heutigen Tag, wird immer wieder versucht, diese Konstante immer genauer zu bestimmen, mit mäßigem Erfolg, wie die Abb. 4.1 zeigt. Das Problem bei diesen Messungen liegt weniger in der genauen Bestimmung der Rotverschiebung des Lichtes der kosmischen Objekte, als vielmehr in deren Entfernungsbestimmung. Wenn man dann noch berücksichtigt, daß die Hubble-Konstante in jede Formel im Zusammenhang mit kosmologischen Modellen eingeht, dann kann man erkennen, mit welcher Genauigkeit Aussagen in der Kosmologie überhaupt möglich sind. Weiter unten werden wir sehen, auf welchen Wert von H_0 man sich im Standardmodell der Kosmologie festgelegt hat.

Der Schweizer Astronom FRITZ ZWICKY entdeckte 1933 bei der Analyse

der Geschwindigkeiten der Objekte in einem Galaxienhaufen eine Anomalie in dem Verhältnis von Masse und Geschwindigkeit. Die aufgrund der Geschwindigkeiten errechnete Masse des Galaxienhaufen erwies sich als 400 mal so groß wie eine Abschätzung der gesamten sichtbaren Materie (hauptsächlich Sterne der Galaxien) ergab. Später zeigten Untersuchungen an einzelnen Galaxien, auch bei unserer Milchstraße, das gleiche Phänomen „fehlender Masse“. Die Umlaufgeschwindigkeit von Sternen um das Zentrum einer Galaxie müßte, wenn man die Summe der Massen aller sichtbaren Sterne, interstellare Materie etc. zusammennimmt, im Verhältnis $1/\sqrt{r}$ abnehmen; r bezeichnet hier den Abstand des Sternes vom Zentrum der Galaxie. Im Gegenteil, die Geschwindigkeit nimmt zunächst mit wachsendem Abstand linear zu und bleibt dann aber über große Distanzen hinweg nahezu konstant. Es muß also in einem Halo um die Galaxien herum unsichtbare Masse existieren, die sich nur durch ihre Gravitationswirkung bemerkbar macht, die *dunkle Materie* (dark matter). Neben dem Nachweis dunkler Materie durch Bewegung der Sterne in Galaxien, kann man ihre Gesamtmasse und Ausdehnung in Galaxienhaufen durch deren Lichtablenkung bestimmen. Die Natur der dunklen Materie ist aber dennoch rätselhaft. Wir werden weiter unten sehen, daß ein großer Anteil an der Gesamtmasse des Universums auf die dunkle Materie entfällt.

In den früher 1940er Jahren wurde von GEORGE GAMOW, RALPH ALPHER und ROBERT HERMAN die Existenz einer Mikrowellen-Hintergrundstrahlung als Folge des Urknalls postuliert (im nächsten Kapitel werden wir genauer auf den Urknall und das frühe Universum eingehen). 1964 entdeckten dann ARNO PENZIAS und ROBERT WILSON diese Mikrowellenstrahlung eher zufällig, als sie ein unerklärliches Rauschen ihrer Antenne eliminieren wollten; die Strahlung kam mit identischer Intensität aus allen Richtungen am Himmel und zeigte keinerlei Schwankungen. Ein Jahr später erfuhren die beiden Astrophysiker ROBERT H. DICKE und PHILIP J.E. PEEBLES von dieser Entdeckung und identifizierten dieses „Rauschen“ als die von GAMOW vorhergesagte kosmische Hintergrundstrahlung. PENZIAS und WILSON erhielten 1978 für ihre Entdeckung den Nobelpreis. Diese Hintergrundstrahlung, zuerst in wenigen Wellenlängen gemessen, wurde in der Folge intensiv erforscht mit Ballonen, mit Raketen und schließlich mit Satelliten. Mit dem Satelliten COBE (Cosmic Background Explorer) stellte man fest daß die Hintergrundstrahlung der eines schwarzen Körpers mit einer Temperatur von 2,725 Kelvin entspricht und zwar mit einer extrem hohen Genauigkeit. Die Temperatur war nahezu isotrop mit ganz geringen Schwankungen im Bereich von $\pm 10^{-4}$ Kelvin. Die 2001 gestartete Raumsonde WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) sollte die Hintergrundstrahlung mit höherer räumlicher Auflösung kartieren. Am 14. Mai 2009 wurde das Weltraumteleskop PLANCK gestartet, das die Hintergrundstrahlung in noch höherer Auflösung untersuchen sollte. Anfang 2013 lagen dann erste Auswertungen vor [2], die die Erwartungen, die man in die Mission gesetzt hatte, voll bestätigten. Das Ergebnis beider Messungen ist eine Karte der Temperaturfluktuationen über den gesamten Himmel, wie sie in der Abb. 4.2 dargestellt ist. Die roten und gelben Bereiche (bei einem Schwarz-Weiß-Ausdruck erscheinen sie hell) sind wärmer, die blauen

(in Schwarz-Weiß sind sie dunkel) sind kälter, wobei der Temperaturunterschied etwa $\pm 0,0002$ Kelvin beträgt. Dabei zeigt die linke untere Hälfte die Ergebnisse von WMAP, die rechte obere Hälfte die vom Weltraumteleskop PLANCK. Die Unterschiede in der Auflösung sind eklatant, die Schlüsse, die man aus den neuen Beobachtungen ziehen konnte, werden wir weiter unten beleuchten. Die Temperaturschwankungen werden als Dichteschwankungen der kosmischen Materie zum Zeitpunkt der Rekombination interpretiert, also zu einem Zeitpunkt von ca. 300.000 Jahren nach dem Urknall. Aus diesen Dichteschwankungen gingen dann die kosmischen Objekte in der Folgezeit hervor. Eine genaue Analyse der Temperaturfluktuationen zeigt, daß die Schwankun-

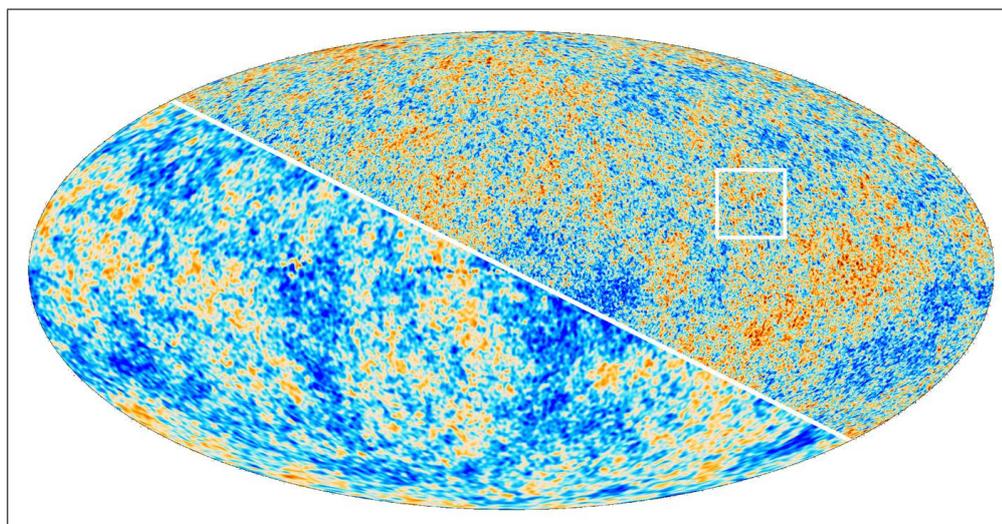


Abbildung 4.2: Temperaturkarte des gesamten Himmels aufgenommen durch die Satelliten WMAP und PLANCK. Der linke untere Teil stammt von WMAP, der rechte oben von PLANCK; der Unterschied der Auflösung ist signifikant. Die roten und gelben Bereiche (bei Schwarz-Weiß-Ausdruck heller) sind wärmer, die blauen (in Schwarz-Weiß dunkel) kühler als die mittlere Temperatur von 2,725 Kelvin. Quelle: ESA.

gen im einem Winkelabstand von etwa einem Grad am größten sind; das entspricht dem ersten Gipfel der Kurve in der Abb. 4.3. Dieser Abstand wird als Länge der Grundschiwingung von Schallwellen in dem Plasma (dem kosmischen Material zum Zeitpunkt der Rekombination) gedeutet; die weiteren Gipfel der Kurve sind dann die entsprechenden Oberschwingungen. Die statistische Temperatur-/Dichteverteilung läßt sich mit bestimmten Annahmen zu kosmologischen Parametern, wie die Krümmung oder der Anteil der dunklen Materie, mit Hilfe der relativistischen Kosmologie berechnen; dargestellt als durchgezogene Kurve in der Abbildung 4.3. So deutet die Lage des ersten Gipfels darauf hin, daß ein flaches Universum vorliegt, seine Höhe sagt etwas aus über den Anteil baryonischer Materie. Die Höhe und Lage des zweiten Gipfels bestimmt dann mit denen des dritten Gipfels den Anteil dunkler Materie im Verhältnis zu dem der baryonischen. Die Punkte mit ihren Fehlerbalken in der Abbildung sind das Ergebnis der Auswertung. Für kleine Winkel (*angulare size* $\lesssim 6^\circ$) ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung hervorragend, die Abweichungen bei großen Winkeln sind aber eine Heraus-

forderung an die Theorie.

Die Tatsache eines flachen Universums kann man sich mit Hilfe folgender Überlegung klar machen. Die Materie lag zum Zeitpunkt der Rekombination als heißes Plasma vor und aufgrund der Dichteschwankungen kann dieses Plasma in Schwingungen geraten. Diese Schwingungen breiten sich mit der Schallgeschwindigkeit v_c aus, deren Wert durch die Beziehung

$$v_c \approx \frac{c}{\sqrt{3}} \approx 0,6 c$$

gegeben ist. Es können nun Plasmabereiche nur dann schwingen, wenn sie mindestens ein mal in den 300.000 Jahren von einer Schallwelle durchlaufen wurden. Daraus läßt sich dann der Schallhorizont $L_s \approx 180.000 \text{ Lj}$ errechnen. Dieser Schallhorizont ist gleichbedeutend mit der Grundschwingung in der Hintergrundstrahlung. Unter welchem Winkel sehen wir heute – nach ca. 13,8

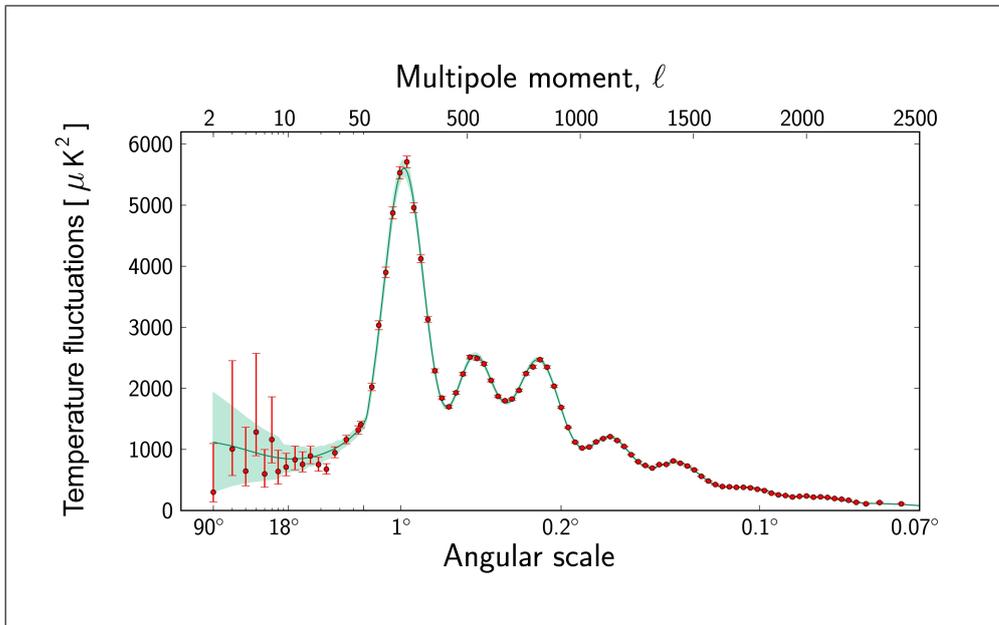


Abbildung 4.3: „Powerspektrum“ der Temperaturschwankungen der Hintergrundstrahlung, wie sie von dem Satelliten PLANCK aufgenommen wurde; Erläuterung im Text. Quelle: ESA.

Milliarden Jahren diesen Schallhorizont L_s ? Der Zeitpunkt, zu dem das Universum durchsichtig wurde und die Hintergrundstrahlung entstand, entspricht einer Rotverschiebung von $z \approx 1000$. Durch die Expansion des Universums hat sich der Schallhorizont ausgedehnt entsprechend

$$L_s^{(heute)} = (1 + z) \cdot L_s \approx 1,8 \cdot 10^8 \text{ Lj.}$$

Wenn das Universum flach ist, dann muß der Winkel α , unter dem die Grundschwingung heute beobachtet wird, von der Größe

$$\alpha = \frac{1,8 \cdot 10^8 \text{ Lj}}{13,8 \cdot 10^9 \text{ Lj}} \approx 0,013$$

sein. Dies entspricht einem Winkel von etwas unter einem Grad, was auch der Lage des ersten Maximums der Kurve der Abb. 4.3 entspricht. Ein kleinerer Winkel, unter dem man die Größe der Grundschiwingung beobachtet, würde ein negativ gekrümmtes Universum bedeuten, ein größerer Winkel entsprechend ein positiv gekrümmtes.

In den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts setzte sich die Erkenntnis durch, daß die schweren Elemente – Elemente mit einem Atomgewicht größer als das des Lithiums – ausschließlich in den Sternen gebildet werden, und nicht, wie man vorher annahm, im Verlauf des frühen Universums; bis zum Element Eisen erfolgt die Bildung neuer Elemente während der normalen Entwicklung der Sterne, während schwerere nur während einer Supernova mit ihren hohen Energien entstehen. Es war bekannt, daß die Materie im Universum zu etwa 75 Prozent aus Wasserstoff und ca. 25 Prozent aus Helium besteht; alle anderen Elemente – von den Astronomen pauschal als „Metalle“ bezeichnet – haben eine extrem geringe Häufigkeit (auch wenn es hier auf der Erde gar nicht danach aussieht). Die Fortschritte in der Kernphysik und der Theorie der Sternentwicklung brachten diesen Wandel in der Erkenntnis. Es waren FRED HOYLE, ROGER TAYLOR und STEPHEN HAWKING, die die Entstehung des relativ großen Anteils von Helium¹ während der kurzen Zeitspanne der Nukleosynthese im frühen Universum aufklären konnten (siehe Abb. 4.5 auf Seite 131).

In den späten 90er Jahren des letzten Jahrhunderts untersuchte man eine spezielle Art von Supernovae – Supernova vom Typ 1a – und stellte fest, daß alle untersuchten fast die gleiche absolute Helligkeit aufwiesen; fast gleiche Helligkeit bedeutete, daß aufgrund der „Lichtkurven“ (die zeitliche Entwicklung der Helligkeit nach dem ersten Aufleuchten bis zum Zeitpunkt, ab der die Supernova nicht mehr sichtbar ist) die Supernovae 1a auf gleiche absolute Helligkeit normiert werden können; die absolute Helligkeit wurde zu $M = -19,31 \pm 0,03$ bestimmt, hängt aber noch von dem genauen Wert der Hubble-Konstanten, bzw. deren Genauigkeit ab. Damit hatte man eine ideale Standardkerze zur Hand, mit deren Hilfe große Tiefen des Universums vermessen konnte. In der Folge wurde eine systematische Suche nach solchen Supernovae in weit entfernten Galaxien mit dem Ziel gestartet, die Art der Expansion des Universums zu bestimmen, ob es gebremst oder beschleunigt expandiert.

Mit der Zeit hatte man einen Satz von Meßwerten zahlreicher Supernovae 1a zusammen, die exakt vermessen wurden und ausgewertet wurden (siehe z.B. [3] oder [44]); heute allgemein als „gold dataset“ bezeichnet. Die Rohdaten der astronomischen Beobachtungen, die scheinbare Helligkeit und die Rotverschiebung, müssen in einem äußerst aufwendigen Prozeß von den Einflüssen, die das Licht auf dem langen Weg von der Quelle bis zum Teleskop erleidet, bereinigt werden. Das Ergebnis dieses Verfahrens ist auf der einen

¹Die normalen Sterne können gar nicht so viel Helium erzeugen, um den Anteil von 25 Prozent der gesamten Materie im Universum zu erreichen.

Seite die Rotverschiebung, ausgedrückt durch den Wert z , auf der anderen Seite die Leuchtkraftentfernung und damit der Distanzmodul $\mu(z) = m - M$,

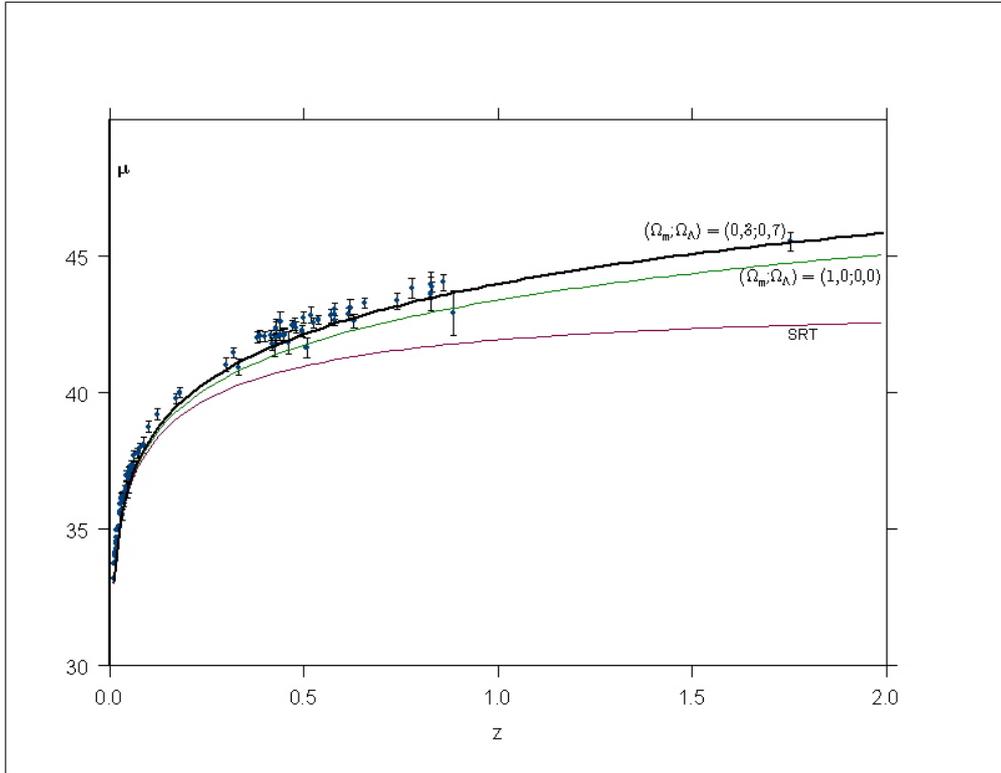


Abbildung 4.4: Die Punkte mit den entsprechenden Fehlerbalken stellen die (korrigierten) Meßwerte für den Distanzmodul und die Rotverschiebung von Supernovae 1a dar. Die obere Kurve ist die optimale Anpassung an die Meßwerte für das Λ CDM-Modell mit den Parametern $\Omega_{m,0} = 0,3$ und $\Omega_{\Lambda,0} = 0,7$. Die mittlere Kurve ist die für ein Einstein-de Sitter Modell mit $\Omega_{m,0} = 1,0$ und $\Omega_{\Lambda,0} = 0,0$. Die untere Kurve ist die Darstellung für den Distanzmodul interpretiert mit dem relativistischen Doppler-Effekt.

wie er in (3.73) auf Seite 116 definiert wurde. Eine wichtige Angabe dabei sind die Fehlergrenzen der jeweiligen Ergebnisse. In der Abbildung 4.4 sind die Distanzmodule der einzelnen Supernovae des „gold dataset“ in Abhängigkeit von der Rotverschiebung als Punkte mit ihren Fehlerbalken dargestellt (die Werte werden im Internet z.B. unter <http://leandros.physics.uoi.gr/snls.htm> zur Verfügung gestellt).

Nachdem dieser Zusammenhang empirisch ermittelt war, ging es darum, welche Werte der Parameter $\Omega_{m,0}$ und $\Omega_{\Lambda,0}$ in die Friedmann-Gleichung (3.65) auf Seite 114 eingesetzt, am besten den gemessenen Kurvenverlauf wiedergeben. Dabei wurde vorausgesetzt, daß ein flaches Universum vorliegt, was sich ja schon bei der Analyse der Hintergrundstrahlung mit großer Wahrscheinlichkeit herausgestellt hatte. Als Werte mit der besten Anpassung an die Meßwerte

ergaben sich für die Parameter²

$$\Omega_{m,0} = 0,3 \quad \text{und} \quad \Omega_{\Lambda,0} = 0,7.$$

Der Kurvenverlauf, der aus diesen Werten folgt, ist als obere Kurve in Abb. 4.4 wiedergegeben, dies ist der Kurvenverlauf des sog. Λ CDM-Modells (siehe Abb. 3.13 auf Seite 103). Zum Vergleich ist mit der mittleren Kurve in Abb. 4.4 der Verlauf für das Einstein-de Sitter Modell dargestellt. Hier hat der Parameter $\Omega_{m,0}$ den Wert eins und $\Omega_{\Lambda,0} = 0$. Diese Kurve gibt die Meßwerte deutlich schlechter wieder. Die Tatsache, daß man einen großen Wert für den Parameter $\Omega_{\Lambda,0}$ aus dem Meßwerten erhalten hat, deutet auf ein beschleunigt expandierendes Universum hin, ein überraschendes Ergebnis, das zum Zeitpunkt der Veröffentlichung für großes Aufsehen gesorgt hat. Die unterer Kurve zeigt den Distanzmodul, berechnet mit der Leuchtkraftentfernung aus dem relativistischen Doppler-Effekt gemäß (3.72). Man kann deutlich erkennen, daß der Kurvenverlauf weit außerhalb der Fehlergrenzen liegt, der durch den „Gold Dataset“ gegeben ist. Die Interpretation der Fluchtgeschwindigkeit durch den relativistischen Doppler-Effekt kann daher aufgrund astronomischer Beobachtungen definitiv ausgeschlossen werden.

Für die Entdeckung des beschleunigt expandierenden Universums wurden in Jahr 2011 die Astrophysiker SAUL PERLMUTTER, BRIAN P. SCHMIDT und ADAM RIESS mit dem Nobelpreis in Physik geehrt.

Setzen wir die aus der PLANCK-Mission [2] neuesten ermittelten Parameter $\Omega_{m,0} = 0,314 \pm 0,002$ und $\Omega_{\Lambda,0} = 0,686 \pm 0,002$ in die Gleichungen (3.42b, d und e) ein, so ergibt sich der Wert für die Bremsfunktion $q(t_0)$ zum heutigen Zeitpunkt zu

$$q(t_0) = -0,67 \pm 0,15,$$

ein negativer Wert, demnach eine beschleunigte Expansion. Der Übergang von gebremster zu beschleunigter Expansion erfolgte bei einem Skalenfaktor $a(t_{exp})$ von

$$a(t_{exp}) \approx 0,6,$$

also, als das Universum erst 60 % seiner heutigen Ausdehnung umfaßte und ungefähr die Hälfte der Zeit ($t \approx 0,55$) zwischen Urknall und heute vergangen war. Der dazu entsprechende z-Wert z_{exp} – Rotverschiebung – ist dann

$$z_{exp} \approx 0,67.$$

Alle bisher geschilderten Ergebnisse faßt man heute zu dem sog. *Standardmodell der Kosmologie*, zusammen, das man wie folgt beschreiben kann:

- Wir leben in einem beschleunigt expandierenden, räumlich flachen Universum, das vor $13,82 \pm 0,06$ Milliarden Jahren aus dem Urknall hervorging ($\Lambda > 0$; $k = 0$); Beweise dafür sind:

²Die Werte der kosmologischen Parameter sind je nach Beobachtungsmethode mit mehr oder weniger großen Fehlern behaftet, was nicht zuletzt an der Ungenauigkeit der Hubble-Konstanten H_0 liegt. Die genannten Werte sind ein praktikabler Kompromiß.

- die galaktische Rotverschiebung;
 - die Existenz der kosmischen Hintergrundstrahlung;
 - das Alter der Sterne und
 - Hubble-Konstante $H_0 = 67,80 \pm 0,77 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.
- Die kosmologischen Parameter, die die Art der Expansion des Universums bestimmen, sind:
 - $\Omega_{m,0} = 0,319 \pm 0,002$, der Anteil gravitierender Masse, der sich selbst wieder aus $\Omega_{CDM} = 0,2695 \pm 0,0069$ – kalte dunkle Materie – und $\Omega_{b,0} = 0,0492 \pm 0,0007$ – barionische Materie – zusammensetzt und
 - $\Omega_{\Lambda,0} = 0,683 \pm 0,02$, der Anteil dunkler Energie.
 - Als das Universum ungefähr 1 Sekunde alt war, entstanden die ersten Elemente:
 - Wasserstoff zu ca. 76 %
 - ^3He zu ca. 24 %
 - in sehr geringem Anteil: D, ^4He und ^7Li .
 - Etwa 300.000 Jahren nach dem Urknall wurde der Raum durchsichtig und es entstand die kosmische Hintergrundstrahlung einer Temperatur heute von $2,725 \pm 0,001$ Kelvin und einem nahezu perfekten Spektrum eines schwarzen Körpers.

Dieses Standardmodell der Kosmologie – auch als Λ CDM-Modell bezeichnet, da es die Dunkle Energie Λ und die (kalte) dunkle Materie (cold dark matter = CDM) beinhaltet, – wird heutzutage von der Mehrheit der Kosmologen anerkannt. Es sei aber nicht verschwiegen, daß es auch durchaus kritische Stimmen gibt. Ein wesentlicher Grund dafür ist der große Wert von $\Omega_{\Lambda,0}$; diese Größe wird auch als *dunkle Energie* bezeichnet. Die Größe $\Omega_{m,0}$ repräsentiert den eigentlichen Masseanteil an der Gesamtmasse im Universum, bestehend aus der Baryonischen Materie (die uns bekannten Atome) zu etwa 4 % und der dunklen Materie zu etwa 26 %. Die dunkle Energie macht also als Masseäquivalent ca. 70 % der Gesamtmasse des Universums aus. Während man die Existenz der dunkle Materie wenigstens durch astronomische Methoden an nahen Objekten wie z.B. Galaxien nachweisen kann, obwohl nicht bekannt ist, aus was sie eigentlich besteht, ist das, was die dunkle Energie ausmachen soll, vollkommen unklar. So wird bemängelt, daß man bei der Korrektur der Meßwerte für die scheinbare Helligkeit der weit entfernten Supernovae 1a den Thomson-Effekt, die Streuung der Photonen an den freien Elektronen im Weltraum, nicht berücksichtigt hat. Zieht man ihn in Betracht, so erhält man eine Korrektur der Meßwerte, die ein Universum ohne beschleunigte, aber mit gebremster Expansion erklären, ähnlich wie im Einstein-de Sitter Modell. Das kosmologische Glied Λ ist zwar dann nicht mehr erforderlich, man muß aber dafür eine weitere Art von dunkler Materie postulieren. Außerdem kommen in letzter Zeit Zweifel auf, ob die absolute Helligkeit der Supernovae 1a wirklich

so einheitlich ist, wie es bisher immer angenommen wurde.

Die Grundannahme des Λ CDM-Modells besteht ja bekanntlich darin, daß ein berechenbares Universum homogen und isotrop sein soll – das kosmologische Prinzip. Die Beobachtungen mit dem Hubble- und dem PLANCK-Teleskop zeigen aber, daß bis in die tiefsten Tiefen des Weltraumes die Verteilung der Objekte alles andere als isotrop ist, Galaxienhaufen und Filamente zahlloser einzelnen Galaxien umschließen gigantische Leerräume. Man argumentiert daher, daß im ganz Großen, über das gesamte Weltall gemittelt die Verteilung doch isotrop sei.

Aufgrund der letzten Bestimmung der Hubble-Konstanten aus den Daten der Hintergrundstrahlung, gewonnen durch den PLANCK-Satelliten [2], ergab sich für sie der Wert zu $H_0^{CBM} = 67,80 \pm 0,77$. Die neuesten Bestimmungen ab dem Jahr 2008 anhand von Beobachtungen an Supernovae 1a oder anderer Standardkerzen ergeben einen Wert von $H_0^{lokal} = 73,8 \pm 2,4$. Ein Blick auf die Abb. 4.1 zeigt das deutlich; der Wert aus den PLANCK-Daten – in der Abb. mit „CMB-Messung“ bezeichnet – hat einen sehr kleinen Fehlerbalken und liegt signifikant unter den andere Meßwerten (ab 2008) der Hubble-Konstanten. Dieser Unterschied wird nun tatsächlich als Hinweis auf eine Inhomogenität der Materieverteilung interpretiert in dem Sinne, daß der PLANCK-Wert der Hubble-Konstante sich aus der Mittelung der Materieverteilung über das gesamte Universum ergibt, während bei den anderen Werten der Einfluß der Inhomogenität unserer näheren kosmischen Umgebung zum Tragen kommt. Man führt diese Erscheinung auf ein schon länger diskutiertes Modell zurück, auf das sog. „*Hubble bubble model*“ [38]. Man stellt sich dabei vor, daß kugelförmige Bereiche des Raumes eine höhere oder niedrigere (mittlere) Materiedichte als der Rest haben und damit auch eine unterschiedliche FLRW-Metrik aufweisen, was dann zu leicht unterschiedlichen Lösungen der Friedmann-Gleichungen führt.

4.2 Das frühe Universum

Bei der Diskussion der verschiedenen kosmologischen Modelle in Kap. 3 haben wir gesehen, daß bei allen der Skalenfaktor $a(t)$ immer kleiner wird, wenn wir die Zeit vom heutigen Zeitpunkt zurückverfolgen und schließlich in einer Singularität endet. Ausnahmen davon sind nur das ursprüngliche EINSTEINSche Modell (siehe Kap. 3.1), das ja explizit als statisches Universum konzipiert war, und das Eddington-Lemaître-Universum (siehe Kap. 3.3). Wenn man davon ausgeht, daß die Gesamtmasse im Universum konstant bleibt, dann muß notwendigerweise die Dichte im Universum immer größer werden, wenn der Skalenfaktor sich verkleinert. LEMAÎTRE war der erste, der diese Tatsache erforschte und einen extrem dichten „Ursprung“ des Universums annahm; er nannte diesen Zustand des Universums *Uratom* und stellte es sich als einen riesigen radioaktiven Atomkern vor, der explodierte und dessen Fragmente schließlich die Galaxien bildeten.

Diese Theorie eines Uratoms wurde keineswegs anerkannt; da LEMAÎTRE Priester war, sah man sie eher als eine „Mischung von Wissenschaft und Theologie an“ [24]. In den 40er Jahren des letzten Jahrhundert entwickelte FRED HOYLE eine Theorie – die Steady-State-Theorie –, die zwar die Expansion des Universums akzeptiert, aber deren Interpretation, als aus einem Uratom hervorgegangen, widerspricht. Für ihn trieb eine kontinuierliche Erzeugung von Materie die Expansion voran. Verächtlich nannte er 1949 in einem seiner Artikel den explosiven Ursprung „big bang“ (Urknall). Bald zeigte sich aber, daß seine Theorie wesentliche Beobachtungstatsachen, wie z.B. die kosmische Hintergrundstrahlung und die Elementhäufigkeiten, nicht erklären konnte und stieß schließlich auf praktisch einhellige Ablehnung bei den anderen Astrophysikern und Kosmologen.

Die Gruppe um den Physiker GEORGE GAMOW untersuchte Ende der 40er Jahre des letzten Jahrhundert den physikalischen Zustand des frühen Universums, wie es sich aus Urknall-Theorie ergab. Ein entscheidender Durchbruch ergab sich 1948, als man erkannte, daß das frühe Universum nicht nur sehr dicht, sondern auch extrem heiß sein mußte. Es mußte in diesem frühen Stadium eine Strahlung existieren, deren Dichte die der Materie überstieg. Diese Strahlung kühlte bei der Expansion ab und deren Nachglühen (heute kosmische Hintergrundstrahlung genannt) erfüllt fortan das gesamte Universum. Er berechnete die heutige Temperatur dieser Strahlung zu einem Wert zwischen 5 und 50 Kelvin (der genaue Wert liegt heute bei 2,7 Kelvin). Heute sind praktisch alle Kosmologen davon überzeugt, daß diese kosmische Hintergrundstrahlung das überzeugende Argument für die Urknalltheorie ist und die Vorhersage GAMOWS eines heißen und dichten frühen Universums bestätigt.

Im folgenden werden wir, der Zeit von heute rückwärts folgend, untersuchen, wie sich die Dichte sowohl der Materie als auch der Strahlung und die Temperatur bis in die Nähe der Singularität entwickelt. Wir werden feststellen, daß mit den heutigen Kenntnissen der Physik, im wesentlichen der Kernphysik, bis zu minimalen Zeitpunkten nach der Singularität ($t = 0$) konkrete Aussagen über den Zustand der „Urmaterie“ gemacht werden können, daß aber Grenzen gesetzt sind, jenseits derer heute nur spekuliert werden kann.

4.2.1 Der Urknall

Der Begriff „Urknall“ wird normalerweise sowohl in dem Sinne als Beginn von Raum und Zeit, als auch als die Zeitspanne zwischen dem Beginn – der Singularität – bis dahin, wenn die normale Materie vorherrschend wird, also zu der kosmischen Zeit von ca. 100.000 Jahren, benutzt. Im Folgenden wollen wir in diesem Kapitel den Begriff im Sinne der zweiten Interpretation verstehen. Eigentlich dient der Begriff Urknall nur dazu, die kosmologischen Theorien mit einem Urknall von denen ohne zu unterscheiden.

Wir werden, um das frühe Universum zu beschreiben, eine Reise rückwärts in der Zeit machen, vom heutigen Zeitpunkt aus bis nahe an den Nullpunkt in der Zeitskala. Wir nehmen an, daß das Alter des Universums zwischen 10 und

20 Milliarden Jahre liegt; der Einfachheit halber legen wir es auf 15 Milliarden Jahre fest (es soll nicht um die letzten Feinheiten, sondern vor allem um das Prinzipielle gehen). Außerdem nutzen wir das Einstein-de Sitter Modell als kosmologisches Modell. Nach diesem Modell gilt für den Skalenfaktor $a(t)$

$$a(t) \propto t^{2/3}$$

und damit nach der Beziehung (3.15d) auf Seite 74 für die Massendichte (entsprechend der Anzahl Teilchen pro Kubikmeter) $\rho_m(t)$

$$\rho_m(t) \propto t^{-2}. \quad (4.1a)$$

Für die Abhängigkeit der Strahlungsdichte $\rho_r(t)$ und der Strahlungstemperatur $T_r(t)$ ergeben sich aus [30] für das Einstein-de Sitter Modell weiter folgende Abhängigkeiten von der Zeit:

$$\begin{aligned} \rho_r(t) &\propto t^{-8/3} \\ T_r(t) &\propto t^{-2/3} \end{aligned} \quad (4.1b)$$

Für den heutigen Zeitpunkt nimmt man an, daß die mittlere Teilchendichte im Universum wie schon erwähnt bei 1 Wasserstoffatom pro Kubikmeter liegt. Nach obiger Formel (4.1a) heißt das, daß die mittlere Dichte des Universums bei einem Alter von 1/10 des heutigen 100 mal größer war. Bei einem Alter von 15 Millionen Jahren, 1/1000 des heutigen Alters, betrug demnach die mittlere Teilchendichte 1 Million Teilchen pro Kubikmeter, die typische Teilchendichte innerhalb von Galaxien. Das bedeutet aber, daß bei einem Alter vor 15 Millionen Jahren oder einer Rotverschiebung $z > 100$ Galaxien überhaupt nicht existieren konnten. Zu diesem Zeitpunkt hatte das Universum entsprechend (4.1b) eine Strahlungstemperatur von ca. 270 Kelvin. Gehen wir in der Zeit weiter zurück, dann erreichen wir bei einem Alter des Universums in unseren Modellannahmen von 400.000 Jahren³ eine Strahlungstemperatur von ca. 3000 Kelvin (entspricht einer Rotverschiebung von $z \approx 1000$). Das ist ein Punkt, bei dem die Materie, die ja zu diesem Zeitpunkt zum überwiegenden Teil aus Wasserstoff besteht, vollständig ionisiert ist – der Zeitpunkt der Rekombination. Die an das Wasserstoffatom gebundenen Elektronen werden frei und die Strahlung wird an diesen Elektronen gestreut; das Universum wird undurchsichtig. Ab dem Zeitpunkt der Rekombination, in der weiteren Zukunft bis zum heutigen Zeitpunkt, wird das Universum innerhalb eines kurzen Zeitintervall durchsichtig; die kosmische Hintergrundstrahlung kühlt in der Folge aufgrund der Expansion bis auf einen Wert von 2,7 Kelvin heute ab.

Ein weiteres Ereignis tritt in diesem frühen Zeitpunkt ein: die Massendichte der Strahlung übersteigt die der Materie, wenn wir immer weiter in die Vergangenheit fortschreiten. Die Energiedichte des Strahlungsfeldes entspricht ja nach dem EINSTEINSchen Gesetz $E = mc^2$ einer Massendichte. Der Zeitpunkt

³Würde man das Standardmodell aus Kap. 4.1 ansetzen, so käme man auf ein Alter von ca. 300.000 Jahren.

t_{id} , wann beide Dichten gleich sind, läßt mit den Werten von $\Omega_{m,0} \approx 0,3$ und $\Omega_{r,0} \approx 7,7 \cdot 10^{-5}$ leicht ausrechnen:

$$\frac{\Omega_{m,0}}{a^3(t_{id})} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4(t_{id})} \rightarrow a(t_{id}) = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \approx 2,6 \cdot 10^{-4}$$

Daraus ergibt sich ein Wert für z_{id} zu diesem Zeitpunkt von

$$z_{id} \approx 4 \cdot 10^3.$$

Als Ergebnis dafür, wann die Dichte des Strahlungsfeldes und der Masse gleich ist, findet man einen Zeitpunkt von etwa 100.000 Jahren nach Beginn des Universums (das entspricht der Rotverschiebung von ca. $z \approx 4000$). Man definiert diesen Zeitpunkt als Beginn oder Ende des frühen Universums, je nachdem ob man von heute aus in die Vergangenheit oder vom Beginn des Universums in die Zukunft schaut. Schreiten wir von dem Punkt, an dem das frühe Universum beginnt, immer weiter in die Vergangenheit vor, so wird das Universum immer dichter und heißer, wobei die Strahlungsdichte überwiegt – das Universum ist nicht mehr materiedominiert, sondern strahlungsdominiert; zeitlich gesehen haben wir die *Materie-Ära* verlassen und kommen in die *Strahlungs-Ära*. Für den Zusammenhang sowohl zwischen Dichte ρ als auch zwischen Temperatur T und Zeit t können wir nach [24] ab diesem Zeitpunkt bis nahe an den Anfang der Zeit angenähert die Beziehungen angeben:

$$\begin{aligned} \rho \cdot t^2 &= 1 \cdot 10^6 \\ t \cdot T^2 &= 1 \cdot 10^{20}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Zeit t wird dabei in Sekunden, die Temperatur T in Kelvin und die Dichte ρ in Gramm pro Kubikzentimeter gemessen. In der Abb. 4.5 ist der Verlauf der Dichte ρ als auch der Temperatur T in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden gemessen im logarithmischen Maßstab dargestellt. Die „Zeitrechnung“ beginnt mit dem Ende der Planck-Ära bei $t = 10^{-44}$ sec (siehe weiter unten) und geht bis zum jetzigen Zeitpunkt. Die linke (senkrechte) Skala ist der logarithmische Maßstab sowohl für die Temperatur als auch für die Dichte. Im Bereich der Materie-Ära wurde der Kurvenverlauf nach den Formeln (4.1a) und (4.1a) berechnet.

Die Strahlungs-Ära beginnt, wenn das Universum etwa 1 Sekunde alt ist und dauert ca. 100.000 Jahre, bis zu dem Zeitpunkt, an dem das frühe Universum endet (siehe Abb. 4.5). Die Temperatur zu Beginn der Ära liegt bei 10^{10} Kelvin und bei einer Strahlungsdichte von 1 Tonne pro Kubikzentimeter; die Massendichte aber beträgt dagegen nur 1/10 Gramm pro Kubikzentimeter. Es liegt am Anfang der Strahlungs-Ära ein Gemisch aus einem dichten „Körper“ aus Strahlung und einem Gas geringer Dichte aus Protonen, Neutronen und Elektronen vor. Wenn das Universum wenige Sekunden alt ist, kommen Protonen und Neutronen laufend zusammen, um Deuterium zu bilden; die hohe Temperatur läßt den Deuterium aber schnell wieder zerfallen. Nach hundert Sekunden aber ist die Temperatur auf 10^9 K gefallen und die Strahlungsenergie nicht mehr ausreichend, um das entstandene Deuterium in

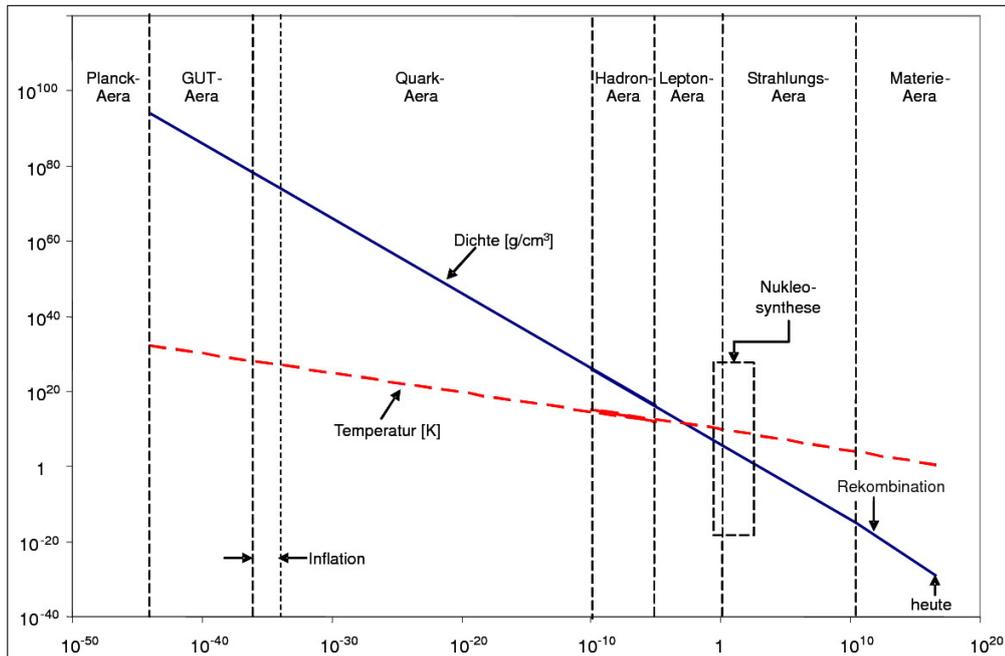


Abbildung 4.5: Die Abhängigkeit der Dichte ρ in g/cm^3 und Temperatur T in Kelvin von der Zeit t in Sekunden nach den Gleichungen (4.2). Sowohl die Zeit als auch Dichte – gestrichelte Linie – und Temperatur – durchgezogene Linie – sind im logarithmischen Maßstab aufgetragen. Der Kurvenverlauf der Dichte und Temperatur im Bereich der Materie-Ära wurde nach den Formeln (4.1a) und (4.1a) berechnet.

seine Bestandteile zu zerlegen. Zu diesem Zeitpunkt beginnt die Fusion von Deuterium in Helium, der Prozess, der in Sternen für die Energieerzeugung dient und in der Wasserstoffbombe für die immense Zerstörungskraft sorgt. Die Phase der Fusion dauert nur ca. 200 Sekunden; in dieser Zeit wird 25 % der Materie in Helium umgewandelt, der restliche Teil besteht aus Wasserstoffkernen und geringe Anteile an Deuterium, Helium-3 und Lithium. Dies ist die Phase der Nukleosynthese, die das weitere Schicksal des Universums bestimmt. Man sollte meinen, die Energie, die bei der Nukleosynthese entsteht, sei enorm. Sie ist es auch, aber im Vergleich zu der zu diesem Zeitpunkt insgesamt vorhandenen Energie ist sie verschwindend gering; diese thermonukleare „Explosion“ läßt die herrschende Temperatur gerade mal um 10 Grad steigen und der Zuwachs an Strahlungsenergie ist wenige Teile pro 100 Millionen. Wir haben hier diesen wichtigen Abschnitt des frühen Universums nur kurz gestreift, für eine detaillierten Darstellung sei auf STEVEN WEINBERGS Buch „Die ersten drei Minuten“ [62] oder für mathematisch Versierte auf [27] verwiesen.

Die Leptonen-Ära beginnt bei einem Alter des Universums von 10^{-4} Sekunden, wenn es eine Temperatur von 10^{12} Kelvin und eine Dichte von 10^{14} Gramm pro Kubikzentimeter hat (siehe Abb. 4.5). Diese Ära endet, wenn das Weltalter 1 Sekunde beträgt, die Temperatur auf 10^{10} K gefallen und die Dichte 10^6 Gramm pro Kubikzentimeter ist; danach beginnt die Strahlungs-Ära.

In dieser Leptonen-Ära ist die Temperatur hoch genug, daß Elektronenpaare – Elektronen und deren Antiteilchen Positronen – spontan in der thermischen Strahlung permanent entstehen und wieder vernichtet werden – Annihilation.

Die Elektronen und Positronen gehören neben den Myonen und den Tauonen, deren Antiteilchen und den entsprechenden Neutrinos und Antineutrinos zu der Familie der Leptonen. In der Tabelle 4.1 ist für die Teilchenfamilien der Leptonen und Hadronen die Ruheenergie und die zugehörige Schwellentemperatur aufgelistet. Die Ruheenergie ergibt sich einfach aus der Ruhemasse der Teilchen, indem man sie in die EINSTEINSchen Energieformel $E = m \cdot c^2$ einsetzt. Die Schwellentemperatur erhält man, indem man die Ruheenergie, gemessen in Einheiten Joule, nach der Beziehung (siehe z.B. [29])

$$1 \text{ Joule} = k \cdot 7,234 \cdot 10^{22} \text{ K} \quad (4.3)$$

durch die Boltzmann-Konstante $k = 1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ dividiert. Je größer die Masse eines Teilchens ist, umso höher ist die Schwellentemperatur; das Myon ist etwa 207 mal schwerer als das Elektron, das in der Tabelle nicht aufgeführte Tauon ist ca. 3500 mal so schwer wie ein Elektron.

Zu Beginn der Leptonen-Ära ist die Temperatur hoch genug, daß auch sie relativ schweren Tauonen-Paare spontan entstehen und wieder vernichtet werden. Bei der Paarvernichtung entstehen die entsprechenden Neutrinos, in diesem Fall die Tau-Neutrinos. Mit fallender Temperatur hört die Paarentstehung auf, die Tauonen sind alle vernichtet, übrig bleiben die zugehörigen Neutrinos. Mit sinkender Temperatur ereilt das gleiche Schicksal die Myonen und schließlich die Elektronen. Am Ende der Leptonen-Ära bleiben Protonen, Neutronen und Elektronen übrig, die Grundbausteine unserer Materie, dabei kommen zwei Neutronen auf 10 Protonen. Die Dichte ist nun gering genug, damit die vorhandenen Neutrinos sich frei, d.h. ohne Interaktion, durch das Universum bewegen können. Ihre Energie wird, genau wie die der Photonen, mit der Expansion des Universums immer weiter verdünnt. Der Neutrino-Hintergrundstrahlung hat heute eine Temperatur von ca. 70 % der der Hintergrundstrahlung, also ungefähr 2 Kelvin. Das Universum ist demnach neben der Materie mit Photonen und Neutrinos durchflutet; in einem Kubikzentimeter sind ungefähr 400 Photonen des Mikrowellenhintergrundes und 900 Neutrinos aller Sorten.

Die Hadronen-Ära ist der Bereich zwischen dem Ende der Leptonen-Ära (von heute aus gesehen) bis zu einem Weltalter von ca. 10^{-10} Sekunden, in dem die Temperatur Werte erreicht, bei denen gem. der Tab. 4.1 die Hadronen spontan entstehen können und auch wieder vernichtet werden. Die Familie der Hadronen umfaßt unter anderem die bekannten Nukleonen wie das Proton und Neutron, aber auch die leichteren Pionen, die Feldpartikel der starken Wechselwirkung, die die Atomkerne zusammenhalten. Weiterhin gehören zu den Hadronen noch die entsprechenden Antiteilchen. In der Hadronen-Ära herrscht eine dichte Mischung von Photonen, Leptonen und Antileptonen sowie Hadronen und Antihadronen. Teilchen und Antiteilchen vernichten sich dauernd

Teilchen	Ruheenergie [MeV]	Schwellentemperatur [K]
Photon	0	0
Leptonen:		
Neutrinos	0	0
Elektron	0,511	$5,93 \cdot 10^9$
Myon	105,66	$1,23 \cdot 10^{12}$
Hadronen:		
π^0 -Mesonen	134,96	$1,5662 \cdot 10^{12}$
π^\pm -Mesonen	139,57	$1,6197 \cdot 10^{12}$
Proton	938,26	$1,0888 \cdot 10^{13}$
Neutron	939,55	$1,0903 \cdot 10^{13}$

Tabelle 4.1: Ruheenergie und Schwellentemperatur verschiedener Elementarteilchen nach [62]. Die Schwellentemperatur ist die Ruheenergie des Teilchens dividiert durch die Boltzmannkonstante; oberhalb dieser Temperatur kann dieses Teilchen spontan aus der thermischen Strahlung entstehen.

gegenseitig, aber bei der herrschenden hohen Temperatur werden permanent neue Teilchen und Antiteilchen erzeugt. Wenn die Temperatur zum Ende der Hadronen-Ära hin immer weiter abfällt, überwiegt die Paarvernichtung (Anihilation) und alle Materie und Antimaterie ist vernichtet; zuletzt verschwinden die leichtesten Hadronen – die Pionen – und übrig bleiben die Leptonen. Hier stellt sich nun die Frage, wieso es in unserem Universum überhaupt normale Materie gibt, die unser gesamtes heutiges Universum ausmacht? Wenn alle Hadronen und Antihadronen sich am Ende ihrer Ära alle gegenseitig vernichtet haben, müßte ja das gesamte Universum nur aus Photonen und Neutrinos bestehen. Tatsächlich aber bleiben am Ende der Hadronen-Ära Protonen und Neutronen für die Leptonen-Ära erhalten und zwar im Verhältnis von 2 Neutronen auf 10 Protonen; ein Verhältnis, das für die Nukleosynthese während der Strahlungs-Ära von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Die einfachste Antwort auf die Frage, warum ausgerechnet die „normale“ Materie als einzige überlebt hat, ist die, daß ein minimaler Überschuß an Materie gegenüber der Antimaterie vorhanden war und so ihr Überleben sicherte. Physikalisch ist die Ursache dieses Überschusses aber keineswegs richtig verstanden; man hat die Hoffnung, daß im Rahmen der *großen vereinheitlichten Theorien* (grand unified theories – GUT) eine Erklärung gefunden werden kann (wir kommen im nächsten Kapitel noch auf diese Theorien zurück). So schwierig es ist, den Überschuß an normaler Materie in der Hadronen-Ära theoretisch zu begründen, so einfach ist es, die Größenordnung des Überschusses anzugeben. Nach HARRISON [24] läßt er sich aus heutigen Beobachtungen abschätzen. Bezeichnen wir die Gesamtzahl der Baryonen (Protonen und Neu-

tronen) mit N , dann ist die Anzahl gegeben durch

$$N = N^+ + N^-,$$

wobei N^+ die Zahl der Baryonen der Materie und N^- die Anzahl der der Antimaterie sei. Postulieren wir einen leichten Überschuß normaler Materie:

$$\Delta N = N^+ - N^-,$$

so ist das Verhältnis des Überschusses zu der Gesamtzahl der Baryonen:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-}. \quad (4.4)$$

Die Zahl ΔN der überschüssigen (Materie-) Baryonen wird sehr klein sein gegenüber der Gesamtzahl N der Baryonen der Materie und Antimaterie, so daß wir sagen können, daß mit der Größe N auch etwa die Anzahl der Photonen und Neutrinos gegeben ist, die durch die Annihilation der Baryonen erzeugt wurden (die Zahl der anderen Teilchen – Pionen und Leptonen – am Ende der Hadronen-Ära kann man bei dieser Überschlagsrechnung vernachlässigen). Da diese Teilchen, die Baryonen der Materie, die Photonen und Neutrinos, während der weiteren Expansions des Universums erhalten bleiben, muß das Verhältnis $\Delta N/N$ das heutige Verhältnis von Baryonen zur Summe von Photonen und Neutrinos widerspiegeln. Heutige Beobachtungen deuten darauf hin, daß die Materiedichte im Universum bei einem Teilchen pro Kubikmeter und die Anzahl der kosmischen Photonen und Neutrinos bei 10^9 pro Kubikmeter liegt. Aus (4.4) ersehen wir dann, daß der Überschuß der Baryonen der normalen Materie gegenüber der Antimaterie bei $\Delta N/N = 10^{-9}$ liegt. Dieses minimale Mehr an Baryonen normaler Materie hat dafür gesorgt, daß das Universum in der uns bekannten Form überhaupt entstehen konnte und wir in der Lage sind, es zu bewundern.

Gehen wir weiter in die Vergangenheit zurück, so kommen wir bei $T \gtrsim 10^{13}$ Kelvin in die **Quark-Ära**. Sie hat ihren Namen von den Grundbausteinen der Baryonen (und Mesonen), den Quarks, strukturlose Teilchen, von denen es inklusive der Antiteilchen 36 Arten gibt. In dieser Ära ist die Temperatur so hoch, daß die Baryonen in ihre Grundbausteine – Quarks und Gluonen – aufgespalten werden. Weiter fortschreitend in die Vergangenheit kommen wir zwischen 10^{-36} und 10^{-34} Sekunden in die **inflationäre Phase** des Universums, wobei es sich in dieser kurzen Zeitspanne um einen Faktor von ca. 10^{60} ausgedehnt hat; im nächsten Kapitel werden wir detaillierter auf diese Phase eingehen. Mit der Quark-Ära haben wir schon den Bereich in Richtung Vergangenheit verlassen, in dem wir noch auf gesicherte Kenntnisse in der Hochenergiephysik zurückgreifen können; wir sind nun auf (teilweise spekulative) Theorien angewiesen. Das gilt auch in der in der weiteren Vergangenheit folgende **GUT-Ära**, der Ära der großen vereinheitlichten Theorien. Nach dieser Theorien soll in dieser Ära sich die Gravitationskraft von einer einheitlichen „Urkraft“ abgespalten haben, der GUT-Kraft, die Kraft der großen vereinheitlichten Theorien (Grand unified theories). Welche Teilchen in dieser Ära

vorhanden waren, ist vollkommen unbekannt (siehe aber weiter unten zum Thema magnetische Monopole im Kap. 4.2.2); das, aus was das Universum in dieser Ära besteht, wird nach GAMOV „Elem“ genannt.

An der Grenze der **Planck-Ära** (Abb. 4.5), bei 10^{-44} Sekunden, einer Temperatur von 10^{32} Kelvin und einer Dichte von 10^{94} Gramm pro Kubikzentimeter, endet definitiv unser gesichertes Wissen (zu den hier angegebenen Planck-Einheiten siehe im Anhang D). Es ist die Grenze, bei der die Gültigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie endet, ein weiteres Fortschreiten in die Vergangenheit bis zur Singularität bei $t = 0$ ist unmöglich. Eine Theorie der Quantengravitation auf der Basis der String- oder der Quantenloop-Theorie könnte in Zukunft gesicherte Kenntnisse liefern. Heute spekuliert man, daß in der Planck-Ära Zeit und Raum ein unauflösbares diskontinuierliches Gemisch bilden aus kleinen schwarzen Löchern mit der Planck-Masse von 10^{-5} Gramm; Zeit und Raum existieren nicht mehr in der uns gewohnten Form.

4.2.2 Phase der Inflation

Gegenwärtige Theorien über die frühesten Zustände des Universums, wie zum Beispiel die Theorie Quantengravitation oder auch die großen vereinheitlichten Theorien⁴ gehen davon aus, daß während der Planck-Ära eine größtmögliche Symmetrie herrschte und daß in der Folge über mehrere Stufen sie immer geringer wurde. So vermutet man, daß in der Planck-Ära alle Grundkräfte der Physik in einer einheitlichen Kraft vereint waren; in der Abb. 4.6 als ToE bezeichnet, als Kraft der „Theory of Everything“ oder Quatengravitation bezeichnet. In der Folge spaltete sie sich in mehreren Übergängen in die uns heute bekannten vier Grundkräfte auf.

Die erste Aufspaltung erfolgte direkt nach der Planck-Ära in die Gravitation und die GUT-Kraft auf (Abb. 4.6). Danach fällt die Temperatur von 10^{32} K innerhalb einer kurzen Zeit auf einen kritischen Wert von 10^{28} K oder entsprechend 10^{15} GeV ab. Zu diesem Zeitpunkt spaltet sich die einheitliche GUT-Kraft in die *starke Wechselwirkung* und die *elektroschwache Wechselwirkung* auf. Dieser Phasenübergang bewirkt die Inflation des Universums und begründet den Unterschied zwischen Materie und Antimaterie sowie zwischen Quarks und Leptonen. Während der gesamten Quark-Ära ist neben der Gravitationskraft und der starken Wechselwirkung die elektroschwache Wechselwirkung vorherrschend, bis sie sich zu Beginn der Hadronen-Ära selbst wieder in die *schwache Wechselwirkung* und die *elektromagnetische Wechselwirkung* aufspaltet, ein Zustand der bis heute gegeben ist (Abb. 4.6). Diese heute herrschenden Grundkräfte der Physik sind die Gravitation, die die großräumigen Strukturen des Universums beherrscht, die schwache Wechselwirkung, die für radioaktive Zerfallsprozesse verantwortlich ist, die elektromagnetische Wechselwirkung, die Atome und Moleküle bindet und die starke Wechselwirkung, die Atomkerne zusammenhält. Sie alle haben äußerst unterschiedliche

⁴Diese „großen vereinheitlichten Theorien“ treten immer in der Mehrzahl auf; es gibt nicht die *eine*, sondern mehrere, die auch von unterschiedlichen Ansätzen ausgehen.

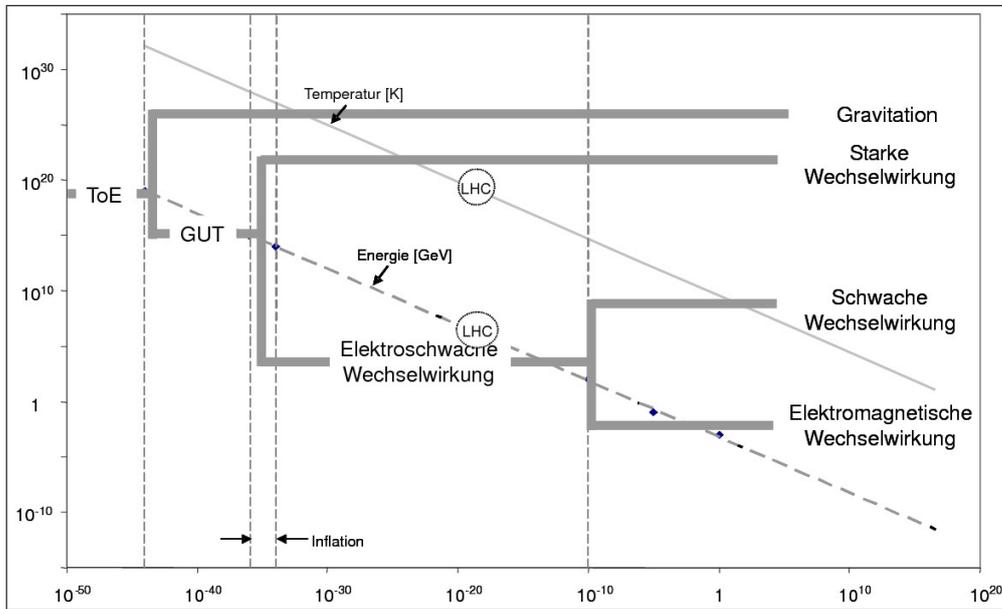


Abbildung 4.6: Aufspaltung der Grundkräfte der Natur. Die durchgezogene Linie stellt den Temperaturverlauf in Abhängigkeit von der Planck-Zeit bis heute im doppeltlogarithmischen Maßstab dar. Die gestrichelte Linie ist der Verlauf der entsprechenden Energie, die ja nach (4.3) proportional zur Temperatur verläuft. Die (hypothetische) einheitliche Urkraft – ToE (nach der theory of everything) – spaltet sich nach der Planck-Zeit auf in die Gravitationskraft und in die GUT-Kraft (grand unified theories). Die Aufspaltung dieser Kraft in die starke und die elektroschwache Wechselwirkung ist die Ursache für die Inflation des Universums. Zu Beginn der Hadronen-Ära erfolgt dann die endgültige Aufspaltung in die vier Grundkräfte der Natur, wie wir sie heute kennen. Der Kreis mit der Benennung LHC ist der Energie- resp. Temperaturbereich, den man mit dem Large Hadron Collider (LHC) bei CERN erreichen will.

Stärken. Wenn wir der schwächsten, der Gravitationskraft den Wert eins zuweisen, dann sind die anderen im Verhältnis um Zehnerpotenzen stärker, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

$$\begin{aligned}
 \text{Gravitation} &\propto 1 \\
 \text{Schwache Wechselwirkung} &\propto 10^{25} \\
 \text{Elektromagnetische Wechselwirkung} &\propto 10^{36} \\
 \text{Starke Wechselwirkung} &\propto 10^{38}
 \end{aligned}$$

Die genauen physikalischen Vorgänge in der Quark-Ära sind zwar durch die großen vereinheitlichten Theorien einigermaßen verstanden, aber noch lange nicht alle experimentell abgesichert. Dafür reichen die heute verfügbaren Energien der Teilchenbeschleuniger bei weitem noch nicht aus. Das Super-Protonen-Synchrotron des Kernforschungszentrums CERN erreichte in der Vergangenheit eine (Schwerpunkts-) Energie bei den kollidierenden Protonen von 400 GeV. Erst mit dem in 2010 in Betrieb gegangenen Large Hadron Collider LHC bei CERN wird man wesentlich größere Schwerpunktsenergien erreichen. Bei dem Protonenmodus des LHC werden Protonen gegenläufig auf einer 27 km langen Kreisbahn beschleunigt und zur Kollision gebracht; die

Energie beträgt dabei 14 TeV (= 14.000 GeV). Mit den wesentlich schwereren Bleiionen will man 1.146 TeV erreichen. In der Abb. 4.6 ist der Energie- und Temperaturbereich, der mit dem LHC erreicht werden soll, als Kreisscheiben markiert; man wird experimentell damit tatsächlich in den Energiebereich der Quark-Ära vorstoßen.

Die Idee der Inflation des Universums geht zurück auf die Fragestellung: warum findet man im gegenwärtigen Universum keine magnetischen Monopole? Die elektromagnetische Theorie von MAXWELL zeigt eine merkwürdige Asymmetrie: es gibt zwar freie elektrische Ladungen, positive und negative, aber magnetischer Nordpol und Südpol treten immer zusammen auf. In der Natur spricht aber eigentlich nichts gegen magnetische Monopole, es wurden auch Experimente gemacht, um sie aufzuspüren, aber immer ohne Erfolg.

Die großen vereinheitlichten Theorien sagen voraus, daß solche magnetischen Monopole bei extrem hohen Energie von über 10^{15} GeV entstehen und eine Masse von mindestens 10^{-9} Gramm haben. In dieser GUT-Ära (siehe Abb. 4.5), in der es noch keine Quarks und Leptonen gibt, sind daher die Monopole sehr häufig und deren Nord- und Südpole spielen die Rolle der Materie und Antimaterie, ansonsten sind sie stabil und zerfallen nicht in Teilchen geringerer Masse. Aufgrund ihres extrem kleinen Wirkungsquerschnittes (ihre Größe beträgt 10^{-29} Zentimeter [24]) entgehen sie bei der raschen Expansion des frühen Universums ihrer gegenseitigen Vernichtung; demzufolge müßten magnetische Monopole heute noch existieren und etwa so häufig wie die Photonen der Hintergrundstrahlung sein.

In der Quark-Ära sind die herrschenden Kräfte die starke und die elektroschwache Wechselwirkung und die vorherrschenden Teilchen dort sind die Quarks und die Leptonen. Nach den großen vereinigten Theorien findet die Bildung der Quarks und Leptonen im Rahmen der Abkühlung aber bei dem kritischen Wert von 10^{28} Kelvin noch nicht statt, wie es eigentlich sein sollte, sondern Elem kühlt weiter ab und wird zu einem Zustand, der als „falsches Vakuum“ bezeichnet wird. Das falsche Vakuum ist der tiefstmögliche Energiezustand für die GUT-Kraft; ein Vorgang, ähnlich wie bei Unterkühlung von Wasser. Genau wie in diesem Fall tritt dann der Phasenübergang ganz plötzlich ein und das falsche Vakuum gibt seine latente Energie frei; die Temperatur steigt zu dem Wert, bei dem dann Quarks, Leptonen und Gluonen entstehen können. 1980 erkannte ALAN GUTH [23], der auf dem Thema der magnetischen Monopole forschte, daß das falsche Vakuum einen Zustand negativen Druckes repräsentiert, der eine beschleunigte Expansion des Universums bewirken muß. Er nannte diese Phase der beschleunigten Expansion *Inflation*. Er erkannte, daß die Inflation nicht nur das Problem der (heute nicht nachweisbaren) magnetischen Monopole löst, sondern auch das Flachheits- und das Horizont-Problem. Weiter unten wird auf diese Themen genauer eingegangen.

Das Universum expandiert in der Frühzeit vor der Inflation von der Planck-Ära bei einem Weltalter von 10^{-44} Sekunden (und einer Dichte von 10^{94}

Gramm pro Kubikzentimeter und einer Temperatur von 10^{32} Kelvin) wie ein Friedmann Universum mit gebremster Expansion. Wenn die Unterkühlung des Elems einsetzt (zum Zeitpunkt 10^{-36} Sekunden, Dichte 10^{78} Gramm pro Kubikzentimeter und einer Temperatur von 10^{28} Kelvin) wirkt plötzlich der negative Druck des falschen Vakuum und erzeugt eine exponentiell beschleunigte Expansion. Diese beschleunigte Expansion hält für die kurze Zeitspanne zwischen 10^{-36} und etwa 10^{-34} Sekunden an; die Dichte bleibt in dieser Zeit annähernd konstant, die Temperatur fällt aber zu Beginn stark ab (Unterkühlung), steigt aber zum Ende dieser Zeitspanne wieder auf etwa den Wert zu Beginn der Expansion. Wenn wir den Skalenfaktor zu Beginn der Inflation mit a_a und zum Ende mit a_e bezeichnen, dann läßt sich der Inflations-Faktor definieren als:

$$\frac{a_e}{a_a} = e^\eta = \text{Inflations - Faktor} \quad (4.5)$$

Der Inflations-Faktor läßt sich mit den großen vereinheitlichten Theorien nicht genau vorhersagen; man schätzt aber für η einen Wert zwischen 50 und 100. Das bedeutet bei $\eta = 50$ einen Wert für den Inflations-Faktor von $5 \cdot 10^{21}$ und bei $\eta = 100$ einen Wert von $3 \cdot 10^{43}$. Zur Verdeutlichung dieser gewaltigen Expansion führt HARRISON [24] als Beispiel ein Proton an, das aufgrund einer Inflation mit $\eta = 92$ das ganze heute beobachtbare Universum ausfüllen würde. Am Ende der Inflation besteht das Universum gänzlich aus Quarks, Leptonen und Gluonen im thermodynamischen Gleichgewicht und expandiert weiter mit gebremster Expansion wie ein Friedmann Universum.

Wie löst nun die Inflation das Problem der heute nicht nachweisbaren magnetischen Monopole? Die großen vereinheitlichte Theorien sagen für die magnetischen Monopole einen Radius von $r_m = 10^{-29}$ Zentimeter voraus; oben hatten wir bereits beschrieben, daß sie nicht mit anderen Teilchen interagieren und daß sie demzufolge bei einer Expansion des Universums in ihrer ursprünglichen Zahl erhalten bleiben müßten. Bei der Temperatur von $T_a = 10^{28}$ Kelvin zu Beginn der Inflation ist der mittlere gegenseitige Abstand der Monopole von der gleichen Größenordnung wie ihr Radius. Fände nun keine Inflation statt, so kann man überschlägig rechnen, daß sich das Universum bis heute um einen Faktor

$$\frac{T_a}{T_h} = 3 \cdot 10^{27}$$

ausgedehnt hat; dabei ist $T_h = 2,7$ Kelvin die heutige Temperatur des Universums. Multiplizieren wir den ursprünglichen Abstand der Monopole mit diesem Faktor, so wäre der heutige etwa 1/3 Millimeter (etwa der Abstand der Photonen im heutigen Universum). Magnetische Monopole müßten also nachweisbar sein. Anders aber, wenn eine inflationäre Phase stattfindet. Der Inflations-Faktor e^η und der darauf folgende Expansions-Faktor T_a/T_h ergeben einen gesamten Faktor für die Expansion von $e^\eta T_a/T_h$. Wenn wir dann für η den Wert 60 annehmen, dann würde im Mittel jede Galaxie gerade mal einen Monopol enthalten; bei einem Wert für η von 67 enthielte die gesamte Hubble-Sphäre nur einen Monopol.

Das Flachheits-Problem (engl. flatness problem) tauchte 1979 auf, als man aus Beobachtungen relativ sicher schließen konnte, daß das Universum flach ist, d.h. eine Euklidische Geometrie besitzt und eine Krümmung $K \approx 0$ hat. Legt man die kosmologischen Modelle zugrunde, dann müßte das Universum zu Beginn auch eine sehr kleine Krümmung gehabt haben. Warum ist die Krümmung am Anfang so klein? Die Krümmung eines homogenen und isotropen Raumes ist gegeben durch

$$K = \frac{k}{R_k^2}. \quad (4.6)$$

Dabei ist R_k der Krümmungsradius und k die Krümmungskonstante aus (3.19) mit den Werten $k = +1, 0, -1$. Mit $k = 0$ erhalten wir den flachen (Euklidischen) Raum, mit $k = 1$ den geschlossenen und mit $k = -1$ den offenen (hyperbolischen) Raum. Mit welcher Krümmung K das Universum beim Urknall startet, ist vollkommen unbekannt, und ihr Wert kann zwischen beliebigen negativen und positiven Größen liegen; daß die Krümmung beim Start ausgerechnet den Wert $K \approx 0$ haben soll, ist daher ausgesprochen unwahrscheinlich. Hinzu kommt die Tatsache, daß, wenn Krümmung groß und positiv ist, das Universum sehr schnell kollabiert und damit endet; ist die Krümmung negativ, dann wäre es bald praktisch leer. Das anthropische Prinzip – vereinfacht gesagt: das Universum muß einfach flach starten, damit wir existieren und es heute in seiner Form beobachten können – in diesem Fall angewandt, ist eher ein Armutszeugnis, als daß es das Problem lösen würde.

Es war wieder ALAN GUTH, der 1981 eine wissenschaftliche Lösung des Flachheits-Problems auf Basis seiner Inflations-Theorie vorschlug. Es ist klar, daß, wenn das Universum als ein flaches $k = 0$ beginnt, es flach bleibt und das Problem sich garnicht stellt. Ist aber zu Beginn $k = 1$ oder $k = -1$, dann verringert sich die Krümmung K von Anfang der inflationären Phase bis zu ihrem Ende dramatisch. Berechnen wir mit (4.5) und (4.6) die Krümmung K_a zu Beginn der Inflation und K_e am Ende, so ergibt sich für das Verhältnis der beiden Krümmungen

$$\frac{K_e}{K_a} = e^{-2\eta}. \quad (4.7)$$

Legen wir hier den Wert $\eta = 67$ zugrunde, den wir oben auch im Fall des Monopol-Problem genutzt haben, so reduziert die Inflation jede beliebige Anfangskrümmung um den Faktor 10^{-58} . HARRISON bringt in [24] ein anschauliches Beispiel für die „Inflation“ eines zerknitterten Luftballons: wenn er aufgeblasen wird, dehnt sich die Oberfläche und er wird glatter.

Mit der Entdeckung der kleinen Temperaturschwankungen in der Größenordnung von 0,001 % auch über große Abstände bei der kosmischen Hintergrundstrahlung, insbesondere durch den Satelliten WMAP nachgewiesen, stellte sich die Frage: wie kann es sein, daß das Universum zum Zeitpunkt der Rekombination, als diese Strahlung entstand, dermaßen gleichförmig gewesen sein kann? Das ist das Horizont-Problem. Die Problematik wollen wir uns an einem Beispiel verdeutlichen. Zur Vereinfachung stellen wir uns ein statisches

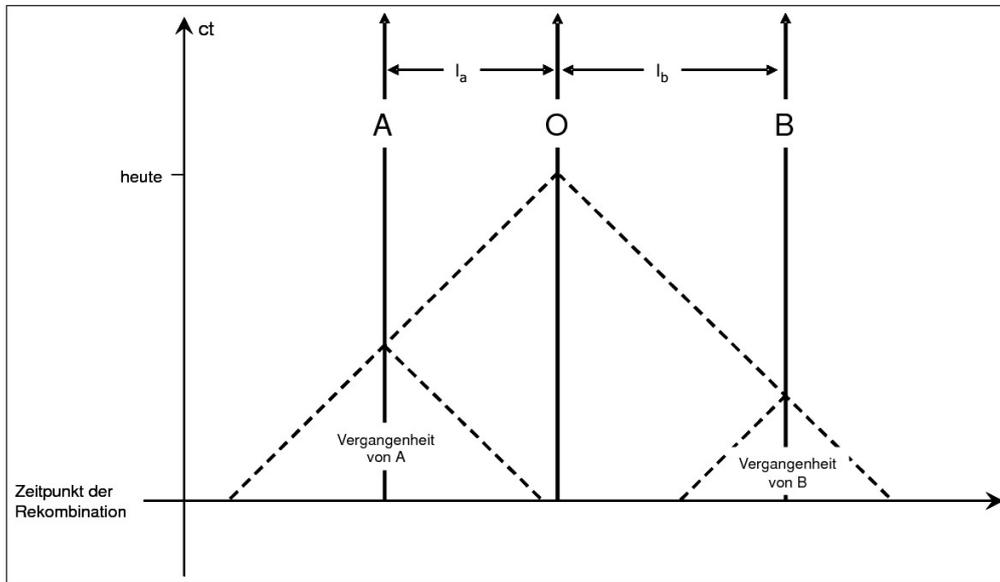


Abbildung 4.7: Die isotrope kosmische Hintergrundstrahlung und das Horizont-Problem; Erläuterung im Text.

Universum vor, dessen Raum-Zeit-Diagramm in der Abb. 4.7 dargestellt ist. Die mit O bezeichnete Weltlinie stelle die des Beobachters dar. Er untersucht zwei Stellen der Hintergrundstrahlung A und B in den Abständen l_a und l_b ; er kann sie „heute“ gleichzeitig beobachten, da sie auf seinem Rückwärtslichtkegel liegen. Ihr Licht übermittelt ihm die Information z.B. über die Temperatur, die zum Zeitpunkt der Rekombination in der „Vergangenheit“ von A und B geherrscht haben und er stellt fest, daß die beiden Temperaturen bis auf 0,001 % gleich sind. Andererseits sehen wir in Abb. 4.7, daß sich die beiden Rückwärtslichtkegel von A und B nicht überschneiden; es kann also keinerlei Beeinflussung oder kausale Zusammenhänge zwischen diesen beiden Stellen im Universum zum Zeitpunkt der Rekombination gegeben haben; es muß also schon zu diesem Zeitpunkt dermaßen isotrop gewesen sein. Bei einem nicht-inflationären Universum gibt es keine bekannte Lösung dieses Problems.

Eine plausible wissenschaftliche Erklärung für das Horizont-Problem liefert auch hier wieder die inflationäre Expansion des Universums. Vor der Inflation, zu einem Weltalter von ca. 10^{-36} Sekunden wechselwirken und homogenisieren sich die Komponenten des Elem (z.B. Monopole, Energie etc.) innerhalb eines kausal verbundenen Bereiches der Größenordnung $c \cdot t$, wobei t das Weltalter bezeichnet. Solch ein kausal verbundener Bereich entspricht dem, was oben als „Vergangenheit von ...“ bezeichnet wurde. Während der kurzen Zeitspanne der Inflation zwischen $t_a = 10^{-36}$ und $t_e = 10^{-34}$ Sekunden dehnt sich das Universum gewaltig mit Überlichtgeschwindigkeit aus und die Bereiche, die weitgehend isotrop sind, dehnen sich um den Inflations-Faktor aus; wenn wir wieder den Wert $\eta = 67$ ansetzen, bedeutet das eine Vergrößerung um den Faktor 10^{29} . Wenn wir uns die Größenordnungen vor Augen führen, so bedeutet

das, daß der kausal verbundene Bereich zum Zeitpunkt vor der Inflation

$$l_a = c \cdot t_a \approx 3 \cdot 10^{-28} \text{ m}$$

groß war. Nach der Inflation hatte dieser isotrope Bereich eine Längenausdehnung von

$$l_e = l_a \cdot e^{67} \approx 30 \text{ m.}$$

Für die darauf folgende „normale“ Expansion des Universums legen wir das kosmologische Modell des Einstein-de Sitter Modell zugrunde. Nach diesem Modell können wir dann die Größe des isotropen Bereiches zum Zeitpunkt der Rekombination nach 300.000 Jahren, also zum Zeitpunkt, an dem die Hintergrundstrahlung entstand, berechnen. Die Längenausdehnung der Bereiche zu den verschiedenen Zeiten verhalten sich wie die Skalenfaktoren $a(t)$ zu den entsprechenden Zeiten. Mit der Gleichung (3.46c) auf Seite 96 erhalten wir dann für die Größe l_e/l_R des isotropen Bereiches zum Zeitpunkt der Rekombination t_R (Zeit in Sekunden gemessen):

$$\frac{l_e}{l_R} = \frac{a_e}{a_R} = \left(\frac{t_e}{t_R} \right)^{2/3} = \left(\frac{10^{-34}}{10^{13}} \right)^{2/3} \approx 10^{-31}.$$

Die Längenausdehnung des isotropen Bereiches zum Zeitpunkt der Rekombination l_R ergibt sich daraus (gerechnet in Lichtjahren und nur die Größenordnung der Zehnerpotenzen berücksichtigt), zu

$$l_R \approx l_e \cdot 10^{31} \approx 10^{15} \text{ Lichtjahre.}$$

Wenn wir die Hintergrundstrahlung in zwei diametral entgegengesetzte Richtungen beobachten, dann liegen die Stellen, aus denen die Strahlung kommt, heute $2 \cdot L_H^{(heute)}$ auseinander. $L_H^{(heute)}$ ist die heutige Hubble-Länge und damit der Radius der Hubble-Sphäre, des Bereichs des Universums, den wir heute beobachten können. In (3.14d) war die Hubble-Länge angegeben mit:

$$L_H^{(heute)} \approx 4.200 \text{ Mpc} \approx 1,3 \cdot 10^{10} \text{ Lichtjahre.}$$

Zur Berechnung der Größe der Hubble-Länge zum Zeitpunkt der Rekombination (Weltalter $\approx 3,0 \cdot 10^5$ Jahre, entspr. $z=1000$) erhalten wir:

$$\frac{a^{(heute)}}{a_R} = \left(\frac{1}{z} \right) = z + 1 \approx 1000$$

Damit ergibt sich die Hubble-Länge zum Zeitpunkt der Rekombination $L_H^{(Rec)}$ mit den Parametern des Standardmodells aus (4.10) auf Seite 143 zu

$$L_H^{(Rec)} \approx 0,2 \text{ Mpc} \approx 7 \cdot 10^5 \text{ Lichtjahre}$$

Vergleichen wir l_R mit $L_H^{(Rec)}$ so sehen wir, daß der isotrope Bereich des Universums zum Zeitpunkt der Rekombination um 9 Zehnerpotenzen größer ist als der von uns überhaupt überschaubare. Die Hintergrundstrahlung muß demnach als Folge der Inflation so isotrop sein, so wie wir sie beobachten.

Die Kosmologie ist heute in Bewegung, sowohl in der Theorie als auch was astronomische Forschung anbetrifft. Die Ergebnisse der Experimente mit den neuen Teilchenbeschleunigern, wie z.B. dem Large Hadron Collider (LHC) in CERN bei Genf, werden nicht nur das Weltbild der Hochenergiephysik erweitern, sondern auch unsere Kenntnisse über das frühe Universum absichern. Ebenso wird die astronomische Beobachtung mit den neuen und zukünftigen Großteleskopen und Satelliten sowohl das kosmologische Wissen erweitern, als auch zusätzliche Erkenntnisse für die Hochenergiephysik bringen. Wir können gespannt die zukünftigen Erkenntnisse der Kosmologie erwarten!

4.2.3 „Größe“ des Universums – die Hubble-Sphäre

Über die Größe des gesamten Universums kann prinzipiell aus Beobachtungen keine Aussage gemacht werden, denn die Hubble-Sphäre ist der Bereich des Universums, der alle für uns momentan beobachtbare Objekte umfaßt. An dessen Grenze erreicht der Betrag der Fluchtgeschwindigkeit die Größe der Lichtgeschwindigkeit c und Objekte jenseits entziehen sich der Beobachtung. Trotzdem muß hinter dieser Grenze das Universum noch „weitergehen“, denn in Kap. 3.9 hatten wir an Beispielen gesehen, daß Objekte mit sehr großen Werten an Rotverschiebung, die sich bei Aussenden ihres Lichtes innerhalb unserer Hubble-Sphäre befanden, prinzipiell beobachtet werden können, sie befinden sich aber heute jenseits unseres Horizontes. Während früher – bis zum Ende des letzten Jahrhunderts – die Frage nach der „Größe“ des Universums geflissentlich umgangen wurde, gehen heute viele Kosmologen davon aus, daß das Universum sehr sehr groß, wenn nicht gar unendlich ist (siehe dazu z.B. [60]).

Die Größe des Radius dieser von uns nur beobachtbaren Sphäre ist die Hubble-Länge L_H , die abhängig ist von dem Skalenfaktor $a(t)$ und damit implizit auch von der Zeit und bestimmt wird durch die Beziehung

$$L_H(a) = \frac{c}{H(a)}. \quad (4.8)$$

$H(a)$ ist dabei die Hubble-Funktion, die von dem Skalenfaktor a abhängt und sich aus der Friedmann-Gleichung ergibt (siehe (3.38a) aus Seite 91)

$$H(a) = H_0 \left[\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2}. \quad (4.9)$$

Bei dieser Gleichung ist ein flaches Universum angenommen. H_0 ist die Hubble-Konstante, der Wert der Hubble-Funktion zum heutigen Zeitpunkt, die Ω -Parameter beziehen sich auf die heutigen Werte der Energiedichte der Masse, der Strahlung und des kosmologischen Parameters (siehe weiter unten). Wir benutzen (4.9) in der von der Zeit t unabhängigen Form, da die Hubble-Länge nur explizit von dem Skalenfaktor abhängt. Wollen wir ihren Wert dagegen zu bestimmten Zeitpunkten berechnen, z.B. zum heutigen Zeitpunkt t_0 , so ist der Wert auf $a(t_0) = 1$ festgesetzt, oder zum Zeitpunkt der Rekombination,

für den $z = 1000$ nach dem Standardmodell angesetzt wird, gilt im letzteren Fall für den Skalenfaktor

$$a_R = \frac{1}{z+1} \approx 10^{-3}.$$

Diesen Wert in (4.9) eingesetzt, ergibt dann z.B. für die Hubble-Länge zum Zeitpunkt der Rekombination L_H^{Rec}

$$L_H^{Rec} \approx 0,2 \text{ Mpc} \approx 7 \cdot 10^5 \text{ Lichtjahre} \approx 7 \cdot 10^{21} \text{ m}. \quad (4.10)$$

Mit dem aus Beobachtungen ermittelte Standardwert $H_0 = 72 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

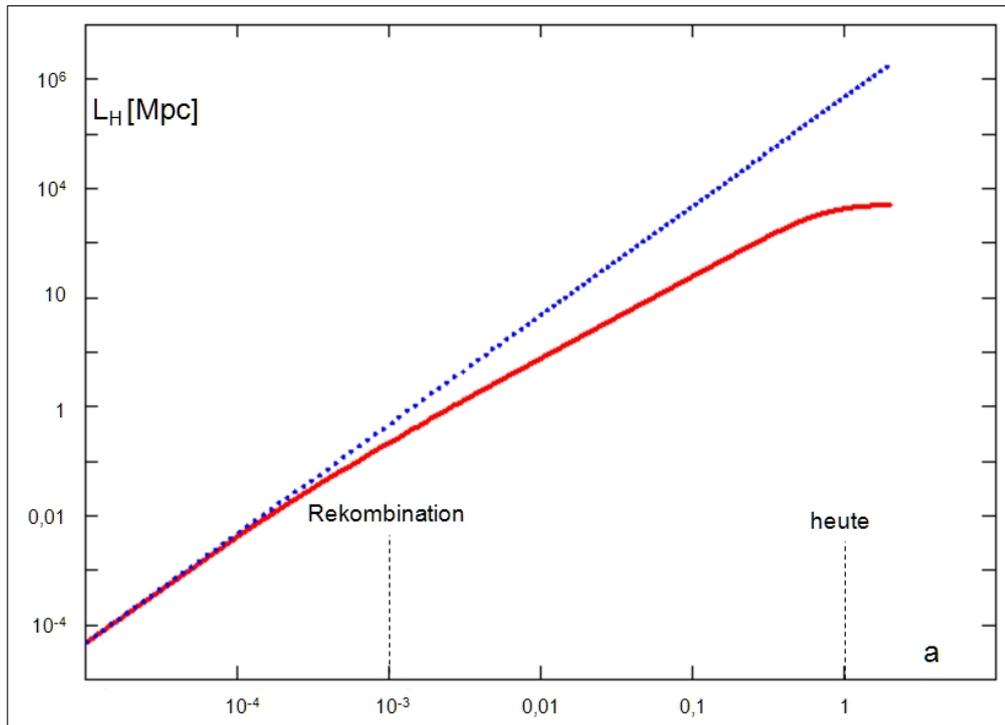


Abbildung 4.8: Hubble-Länge L_H in Abhängigkeit von dem Skalenfaktor a mit der Gleichung (4.9) berechnet (rote durchgezogene Kurve). Die für sehr kleine Werte von a bestimmte Kurve (blaue gepunktete Kurve) wird durch Gleichung (4.11) bestimmt.

und dem Wert für die Lichtgeschwindigkeit von $c = 300.000 \text{ kmsec}^{-1}$ erhalten wir, wie in vorhergehenden Kapiteln schon ausgerechnet, für den heutigen Wert der Hubble-Länge

$$L_H^{heute} \approx 4.200 \text{ Mpc} \approx 1,2 \cdot 10^{26} \text{ m}.$$

Gemäß dem Standardmodell der Kosmologie haben die heutigen Ω -Parameter folgende (gerundete) Zahlenwerte:

$$\begin{aligned} \Omega_{m,0} &= 0,3 \\ \Omega_{r,0} &= 8 \cdot 10^{-5} \\ \Omega_{\Lambda,0} &= 0,7. \end{aligned}$$

Der Wert des Skalenfaktors a wird für den heutigen Zeitpunkt in üblicher Weise gleich eins gesetzt; damit erhält man mit der Gleichung (4.9) den in der Abb. 4.8 roten durchgezogenen Kurvenverlauf. In der doppelt-logarithmischen Darstellung der Abbildung fällt der Wert der Hubble-Länge monoton für kleiner werdende Werte von a – Werte in der Vergangenheit, während sie in der Zukunft sich einem konstanten Wert nähert, der durch

$$L_H^{Zukunft} = \frac{c}{H_0 \cdot \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}} \approx 5 \cdot 10^3 \text{ Mpc}$$

gegeben ist. Die beschleunigte Expansion des Universums bei gleich bleibender Hubble-Länge – demnach auch gleich bleibender Hubble-Sphäre – hat zur Folge, daß in Zukunft die beobachtbaren Objekte peu à peu aus der sichtbaren Sphäre verschwinden und der Himmel für die Teleskope immer leerer wird. Wir können das aber sehr gelassen sehen, denn wenn man die Zeit bestimmt, in der dieser Zustand erreicht wird, dann wird noch einmal doppelt soviel Zeit vergehen, wie seit dem Urknall bisher vergangen ist, also ca. 27 Milliarden Jahre; vorausgesetzt die kosmologische Konstante bleibt tatsächlich konstant.

Für sehr kleine Werte von a ($a \ll 1$), kann man in Gleichung (4.9) $1/a^4$ vor die Klammer ziehen und erhält dann für die Hubble-Länge die Gleichung

$$L_H(a) = \frac{c \cdot a^2}{H_0 \cdot \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}}. \quad (4.11)$$

Der Kurvenverlauf ist in der Abb. 4.8 durch die blaue punktierte Gerade dargestellt und man erkennt, daß (4.11) für Werte $a < 10^{-4}$ die Abhängigkeit der Hubble-Länge von dem Skalenfaktor sehr gut wiedergegeben wird.

Genau wie bei einer beschleunigten Expansion des Universums in der späten Phase seiner Existenz die Hubble-Länge und damit auch die Hubble-Sphäre konstant bleibt, so gilt das auch während der Phase der Inflation im frühen Universum. ANDREI LINDE konnte zeigen, daß während der Inflation das frühe Universum mit einem Skalenfaktor exponentiell angenähert wie $e^{H^{(infl)} \cdot t}$ (siehe z.B. [36]) expandiert ($H^{(infl)} = const$), während die Hubble-Länge $L_H = c/H^{(infl)}$ konstant bleibt.

In den vorhergehenden Kapiteln wurde gezeigt, daß physikalische Konzepte (magnetische Monopole) sowie astronomische Beobachtungen (Flachheits- und Horizont-Problem) dafür sprechen, daß im frühen Universum eine Inflation stattgefunden haben muß. In Folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Anwendung alleine der Friedmann-Gleichung für die Expansion des Universums nach dem Urknall bis zum heutigen Zeitpunkt zu unsinnigen Ergebnissen führt, was die „Größe“ des heutigen Universums anbetrifft. Das ist ein weiterer Hinweis für eine gewaltige Ausdehnung (Inflation) des Universums in seiner frühen Phase.

Wenn wir in dem Zusammenhang von „Größe“ des Universums sprechen, können wir uns immer nur auf die Ausdehnung des uns durch Beobachtung

zugänglichen Bereiches – die Hubble-Sphäre – beziehen und versuchen zu ermitteln, wie sie sich im Laufe der Expansion des Universums ausgedehnt hat (eine Schrumpfung scheint bisher eher ausgeschlossen). Wie in dem Kapitel über das frühe Universum – Kap. 4.2.1 – erläutert, ist der früheste Zeitpunkt, ab dem wir überhaupt sinnvoll physikalisch rechnen können, das Ende der Planck-Ära mit der Planck-Zeit

$$t_P \approx 5,4 \cdot 10^{-44} \text{ sec};$$

zu diesem Zeitpunkt nach dem Urknall habe das Universum einen Radius in der Größenordnung der Planck-Länge

$$l_P \approx 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}.$$

Nehmen wir zunächst einmal an, das Universum hätte sich von Anfang an gleichmäßig proportional zur Zeit ausgedehnt, d.h. es gelte $a(t) \propto t$, zugebenermaßen eine nicht ganz zutreffende Annahme. Aber damit können wir leicht abschätzen, um welchen Faktor F_{linear} sich dieses hypothetische Universum ausgedehnt hat, denn wegen der Linearität verhält sich die Größe dieses Universums heute zu seiner Größe während der Planck-Zeit (Planck-Länge) wie die heutige Zeit seit dem Urknall zu der Planck-Zeit. Die Zeitdauer in Sekunden seit dem Urknall ergibt sich zu $t_0 \approx 13,7 \cdot 10^9$ Jahre $\approx 4,3 \cdot 10^{17}$ sec und somit der Faktor F_{linear} zu

$$F_{linear} = \frac{t_0}{t_P} \approx 8 \cdot 10^{60}.$$

Bei dem angenommenen Anfangsradius des Universums in der Größenordnung l_P ist seine Größe in der Zeit bis heute um 60 Zehnerpotenzen angewachsen auf

$$l_{heute} \approx l_P \cdot F_{linear} \approx 1,3 \cdot 10^{26} \text{ m}. \quad (4.12)$$

Dieser Wert von l_{heute} liegt in der gleichen Größenordnung wie der des heutigen Hubble-Radius, eigentlich ein zufriedenstellendes Ergebnis, wenn da nicht die unrealistische Annahme der linearen Expansion wäre.

Ein realistischeres Bild wird sicher das einfache kosmologische Modell von Einstein-de Sitter liefern. Wir haben dabei Beziehungen für die Abhängigkeit des Skalenfaktors $a(t)$ und der Hubble-Funktion $H(t)$ von der Zeit (siehe (3.46c) auf Seite 96):

$$\begin{aligned} a(t) &= \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{-2/3} t^{2/3} \\ H(t) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Um zu bestimmen, um welchen Faktor sich der Skalenfaktor $a(t)$ seit Ende der Planck-Ära bis heute ausgedehnt hat, so müssen wir mit Hilfe der ersten Gleichung aus (4.13) die Größe des Skalenfaktors $a(t_P)$ zu diesem Zeitpunkt, der Planck-Zeit $t_P = 5,4 \cdot 10^{-44}$ sec, bestimmen:

$$a(t_P) \approx 3,2 \cdot 10^{-35}.$$

Da der Skalenfaktor zum heutigen Zeitpunkt t_0 zu $a(t_0) = 1$ festgesetzt wird, so ist der Faktor $F_{(E-d S)}$, um den sich das Universum seit der Planck-Ära bis heute ausgedehnt hat:

$$F_{(E-d S)} = \frac{1}{a(t_P)} \approx 3 \cdot 10^{34}$$

Mit Hilfe der zweiten Gleichung können wir den Hubble-Radius zum Zeitpunkt t_P bestimmen:

$$L_H^{(E-d S)}(t_P) = \frac{c}{H(t_P)} = \frac{3}{2} c t_P \approx 10^{-33} \text{ m};$$

Diesen Wert mit dem Faktor $F_{(E-d S)}$ multipliziert, ergibt den Hubble-Radius zum heutigen Zeitpunkt

$$L_H^{heute} = F_{(E-d S)} \cdot L_H^{(E-d S)}(t_P) \approx 30 \text{ m}.$$

Unter den Bedingungen des Einstein-de Sitter Modells hätte das heute beobachtbare Universum demnach eine Größe von gerade einmal 30 Meter, ein vollkommen unmögliches Ergebnis.

Wenn wir nun die „Größe“ des Universums mit der Friedmann-Lösung (4.9) des Standardmodells berechnen, betrachten wir das sehr frühe Universum, d.h. $a \ll 1$. Wie oben schon erwähnt, können wir in (4.9) $1/a^4$ vor die Klammer ziehen und erhalten so eine Differentialgleichung für den Skalenfaktor a im sehr frühen Universum:

$$\begin{aligned} H(a) &= \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}}}{a^2} \\ a da &= H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} dt \end{aligned} \quad (4.14a)$$

mit der Lösung

$$a(t) = \sqrt{2H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}} \cdot t^{1/2}}. \quad (4.14b)$$

Mit der letzten Gleichung kann dann der Skalenfaktor zur Planck-Zeit a_P berechnet werden, indem man die Zahlenwerte für H_0 (in Einheiten 1/sec), für $\Omega_{r,0}$ und die Planck-Zeit t_P einsetzt und erhält einen Wert von

$$a(t_P) \approx 4,7 \cdot 10^{-32}.$$

Für den Expansionsfaktor F_{Friedm} erhalten wir in diesem Fall

$$F_{Friedm} = \frac{1}{a(t_P)} \approx 2 \cdot 10^{31}.$$

Setzen wir (4.14b) in (4.14a) ein, so ergibt sich der Hubble-Radius zum Zeitpunkt t_P zu

$$L_H^{(Friedm)}(t_P) = 2 c t_P \approx 3 \cdot 10^{-33} \text{ m}.$$

Diesen Wert mit dem Faktor F_{Friedm} multipliziert ergibt schließlich den Hubble-Radius des heute beobachtbaren Universums unter der Annahme des Standardmodells zu

$$L_H^{heute} = F_{Friedm} \cdot L_H^{(Friedm)}(t_P) \approx 6 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

also noch kleiner, als bei dem Einstein-de Sitter Modell. Der Grund liegt darin, daß in dem Friedmann-Modell die Energiedichte der Strahlung berücksichtigt wird und die ist gerade im frühen Universum der wesentliche Faktor, der die Expansion bremst. Mathematisch gesehen sind diese Unterschiede auch verständlich, im linearen Fall ist $a(t) \propto t$, im Fall des Einstein-de Sitter Modells ist $a(t) \propto t^{2/3}$ und im Fall des Standardmodells ist $a(t) \propto t^{1/2}$. Diese geradezu unsinnigen Werte für die „Größe“ des Universums ist ein weiterer deutlicher Hinweis neben den in Kap. 4.2.2 besprochenen physikalischen Gründen für eine inflationäre Phase im frühen Universum.

Anhang A

Metrik von Räumen konstanter Krümmung

Im Folgenden werden wir Metriken von RIEMANNschen Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung besprechen, wobei wir uns im Hinblick auf das, was in der Kosmologie der Allgemeinen Relativitätstheorie benötigt wird, auf Mannigfaltigkeiten von maximal drei (Raum-) Dimensionen beschränken. Dabei gibt es genau drei verschiedene Möglichkeiten von (konstanter) Krümmung in Riemannschen Mannigfaltigkeiten:

1. *Euklidische Krümmung*: bei 2 Dimensionen entspricht diese der Fläche Euklidischer Geometrie, bei 3 Dimensionen ist das der Raum unserer Alltagsvorstellung. Allgemein spricht man bei dieser Art der Krümmung von *flachen* Räumen. Die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt 180° .
2. *positive Krümmung*: Standardbeispiel dafür ist die Kugeloberfläche als 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein 3-dimensionaler Raum (Mannigfaltigkeit) positiver Krümmung ist für uns nicht vorstellbar, gleichwohl mathematisch zu behandeln. Diese Räume positiver Krümmung sind geschlossene Räume. Die Winkelsumme beträgt hier $\geq 180^\circ$.
3. *negative Krümmung*: Eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit negativer konstanter Krümmung ist die Sattelfläche – siehe Abb. 2.5 c auf Seite 37. Für den dreidimensionalen Fall gibt es eine analoge Mannigfaltigkeit. Diese Räume sind offen und die Winkelsumme beträgt hier $\leq 180^\circ$.

Wir werden im Folgenden die Metrik oder das Bogenelement in dem Raum mit $d\sigma$ bezeichnen, um es von der Metrik bzw. Linienelement ds der Minkowski-Welt zu unterscheiden.

A.1 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten (Flächen)

Die Metrik in der Euklidischen Fläche ist entsprechend dem Lehrsatz des PYTHAGORAS gegeben durch

$$d\sigma^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (\text{A.1a})$$

In der Ebene können die kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten überführt werden. Die entsprechenden Transformationsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \varphi \\y &= r \cdot \sin \varphi \\z &= 0\end{aligned}\tag{A.1b}$$

Um die Größe $d\sigma^2$ in Polarkoordinaten zu erhalten, müssen die entsprechenden Differentiale berechnet und in (A.1a) eingesetzt werden. So bestimmt sich dx z.B. nach der Kettenregel zu

$$dx = dr \cdot \cos \varphi - r \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

Analog verfährt man für dy , setzt dann diese Differentiale in (A.1a) und erhält für die Metrik in Polarkoordinaten

$$d\sigma^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2\tag{A.1c}$$

Positive Krümmung beschreibt eine Kugeloberfläche – eine Sphäre –, wobei die Kugel mit dem Radius R in den Euklidischen dreidimensionalen Raum eingebettet ist. Relevant für die 2-dimensionale positiv gekrümmte Riemannsche Mannigfaltigkeit sind nur die Punkte auf der Oberfläche der Kugel. In Polarkoordinaten erhalten wir dann für die Koordinaten:

$$\begin{aligned}x &= R \cdot \cos \varphi \sin \vartheta \\y &= R \cdot \sin \varphi \sin \vartheta \\z &= R \cdot \cos \vartheta\end{aligned}\tag{A.2a}$$

mit $R = \text{const.}$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (siehe dazu z.B. Abb. B.1). Mit analogen Umrechnungen (allerdings etwas mühsamer) erhalten wir für die Metrik:

$$d\sigma^2 = R^2 \left[(d\vartheta)^2 + (\sin \vartheta)^2 (d\varphi)^2 \right].\tag{A.2b}$$

Der metrische Tensor \mathbf{g} ist in diesem Fall

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & (R \sin \vartheta)^2 \end{pmatrix}.\tag{A.2c}$$

Häufig wird eine alternative Transformation benutzt, indem man mit $r = R \cdot \vartheta$ den Abstand vom „Nordpol“ versteht:

$$d\sigma^2 = (dr)^2 + \left[R \sin\left(\frac{r}{R}\right) \right]^2 (d\varphi)^2 \quad 0 \leq r \leq \pi R.\tag{A.2d}$$

Die so definierte Kugeloberfläche ist ein 2-dimensionaler geschlossener Raum mit einer Winkelsumme im Dreieck von $\alpha + \beta + \gamma = \pi + F/R^2$, wenn F die Fläche des Dreiecks ist.

Negative Krümmung beschreibt eine hyperbolische Fläche, eine Sattelfläche. Mit analogen Polarkoordinaten wie (A.2a)

$$\begin{aligned}x &= R \cdot \cos \varphi \sinh \vartheta \\y &= R \cdot \sin \varphi \sinh \vartheta \\z &= R \cdot \cosh \vartheta\end{aligned}\tag{A.3a}$$

erhalten wir in diesem Fall für die Metrik genau wie in (A.2d)

$$d\sigma^2 = (dr)^2 + \left[R \sinh\left(\frac{r}{R}\right) \right]^2 (d\varphi)^2 \quad \text{mit } r = 0 \dots \infty\tag{A.3b}$$

Die Sattelfläche ist ein 2-dimensionaler offener Raum; die Winkelsumme im Dreieck beträgt $\alpha + \beta + \gamma = \pi - F/R^2$ mit F als Fläche des Dreiecks.

A.2 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten

Der Euklidische 3-dimensionale Raum hat auf Basis kartesischer Koordinaten eine Metrik in der Form

$$d\sigma^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\tag{A.4a}$$

Um diese Metrik in räumlichen Polarkoordinaten – Kugelkoordinaten – auszudrücken, können wir die Formeln (A.2a) übernehmen, allerdings mit variablem Radius r :

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \varphi \sin \vartheta \\y &= r \cdot \sin \varphi \sin \vartheta \\z &= r \cdot \cos \vartheta\end{aligned}\tag{A.4b}$$

und erhalten damit

$$d\sigma^2 = (dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + (r \sin \vartheta)^2(d\varphi)^2.\tag{A.4c}$$

Eine positiv gekrümmte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit – die Hypersphäre – muß in einen 4-dimensionalen Raum eingebettet sein. Für diesen benötigen wir 4 kartesische Koordinaten (x, y, z, w) , womit sich hier die Metrik zu

$$d\sigma^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (dw)^2$$

ergibt.

So wie wir uns den 2-dimensionalen positiv gekrümmten Raum – die Kugeloberfläche – mit einem festen Radius R im 3-dimensionalen Raum eingebettet vorstellen müssen, ist der 3-dimensionale positiv gekrümmte Raum mit einem festen Radius R im 4-dimensionalen Raum eingebettet. Die Gleichung für diese Hypersphäre ist gegeben durch

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 = \text{const.}\tag{A.5a}$$

Um die Metrik dieses Raumes analog zu (A.2b) darzustellen, benötigen wir hier 4-dimensionale Polarkoordinaten. (A.2b) läßt sich ganz systematisch auf 4 Dimensionen erweitern:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos \varphi \sin \vartheta \sin \xi \\ y &= R \cdot \sin \varphi \sin \vartheta \sin \xi \\ z &= R \cdot \cos \vartheta \sin \xi \\ w &= R \cdot \cos \xi \end{aligned} \quad (\text{A.5b})$$

Daraus erhalten wir für die Metrik des positiv (im vierdimensionalen Raum) gekrümmten 3-dimensionalen Raum in Polarkoordinaten:

$$d\sigma^2 = R^2 \cdot \left((d\xi)^2 + \sin^2 \xi \left[(d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 \right] \right) \quad (\text{A.5c})$$

Führen wir die Koordinatentransformation $\varrho = \sin \xi$ ein, so können wir mit den Zwischenrechnungen

$$d\varrho = \cos \xi d\xi \Rightarrow d\xi = \frac{d\varrho}{\cos \xi} = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \sin^2 \xi}} = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - \varrho^2}}$$

für die Metrik schreiben:

$$d\sigma^2 = R^2 \cdot \left(\frac{(d\varrho)^2}{1 - \varrho^2} + \varrho^2 \left[(d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 \right] \right) \quad (\text{A.5d})$$

Die negativ gekrümmte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit muß ebenfalls in einen 4-dimensionalen Raum eingebettet sein. Die Gleichung für diesen Raum lautet:

$$w^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2 = \text{const.}$$

Die Polarkoordinaten für diese Mannigfaltigkeit können wir nach dem gleichen Schema wie oben bestimmen – die Winkelfunktion ξ wird durch die entsprechende Hyperbelfunktion ersetzt – und erhalten:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos \varphi \sin \vartheta \sinh \xi \\ y &= R \cdot \sin \varphi \sin \vartheta \sinh \xi \\ z &= R \cdot \cos \vartheta \sinh \xi \\ w &= R \cdot \cosh \xi \end{aligned} \quad (\text{A.6a})$$

Analog zu dem Vorherigen ergibt sich die Metrik für diesen 3-dimensionalen Raum negativer konstanter Krümmung:

$$d\sigma^2 = R^2 \cdot \left((d\xi)^2 + \sinh^2 \xi \left[(d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 \right] \right) \quad (\text{A.6b})$$

Genau wie im Fall der Hypersphäre führen wir die Koordinatentransformation $\varrho = \sinh \xi$ ein, so können wir mit den Zwischenrechnungen

$$d\varrho = \cosh \xi d\xi \Rightarrow d\xi = \frac{d\varrho}{\cosh \xi} = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 + \sinh^2 \xi}} = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 + \varrho^2}}$$

für die Metrik schreiben:

$$d\sigma^2 = R^2 \cdot \left(\frac{(d\rho)^2}{1 + \rho^2} + \rho^2 \left[(d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 \right] \right) \quad (\text{A.6c})$$

Definieren wir einen Parameter k , die Krümmungskonstante, zur Unterscheidung der drei Arten der Raum-Krümmung

$$k = \begin{cases} 0 & \rho = r; & \text{Euklidischer Fall offener Raum,} \\ +1 & \rho = \sin \xi; & \text{Positive Krümmung geschlossener Raum,} \\ -1 & \rho = \sinh \xi; & \text{Negative Krümmung offener Raum} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

so erhalten wir eine generelle Formel für die Metrik aller gekrümmter dreidimensionaler Räume

$$d\sigma^2 = R^2 \cdot \left(\frac{d\rho^2}{1 - k\rho^2} + \rho^2 \left[(d\vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta (d\varphi)^2 \right] \right) \quad (\text{A.8a})$$

Für den metrischen Tensor \mathbf{g} ergibt sich für diese Räume daraus:

$$\mathbf{g} = R^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{1-k\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad (\text{A.8b})$$

Anhang B

Geometrie der Kugelfläche

Stellen wir uns vor, ein Flächenwesen, lebend auf einer Kugeloberfläche, befestige im Punkt A ein „Seil“ der Länge r . In seiner Welt ist dieses „Seil“ natürlich eine Linie der Länge r . Um den Punkt A schlägt es nun einen Kreis, indem

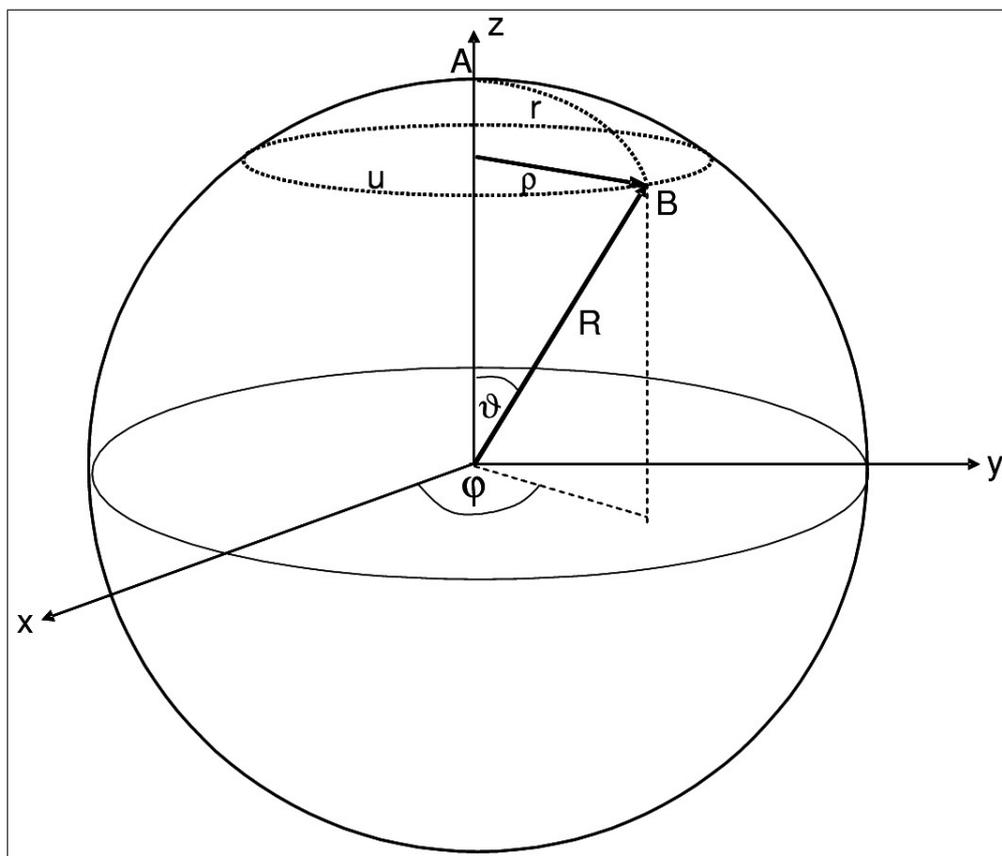


Abbildung B.1: Auf einer Kugeloberfläche ist das Verhältnis der Kreisumfanges u zum Radius $r \leq 2\pi$; Erläuterung im Text.

es das „Seil“ straff hält und mißt anschließend den Umfang des Kreises in der Länge u . Um uns das geometrisch zu veranschaulichen, nehmen wir an, der Mittelpunkt des Kreises falle mit dem „Nordpol“ der Kugel zusammen,

wie in der Abb. B.1 dargestellt. Wir, die wir in einer dreidimensionalen Welt leben, können die extrinsische Krümmung der Kugeloberfläche erkennen und entsprechende Berechnungen anstellen. Für uns entspricht die Länge r der Länge des Kreisbogens und der Umfang u des Kreises der Länge eines „Breitenkreises“ auf der Kugel – die gepunkteten Kurven in der Abb. B.1. Für den Umfang u erhalten wir daher:

$$u = 2\pi\rho = 2\pi R \sin\vartheta. \quad (\text{B.1a})$$

Für den Kreisbogen r oder die Länge des „Seils“, mit dem der Kreis gebildet wird, erhalten wir, wenn wir den Winkel ϑ im Bogenmaß ausdrücken

$$r = R \cdot \vartheta. \quad (\text{B.1b})$$

Bildet nun das Flächenwesen das Verhältnis von Umfang u zu Radius r seines Kreises, so erhält es

$$\frac{u}{r} = \frac{2\pi \sin\vartheta}{\vartheta}. \quad (\text{B.1c})$$

Für Kreise mit sehr kleinem Radius r , oder anders ausgedrückt, für einen sehr kleinen Winkel ϑ , können wir die rechte Seite von (B.1c) in Reihe entwickeln

$$\frac{2\pi \sin\vartheta}{\vartheta} = \frac{2\pi}{\vartheta} \left(\vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \dots \right) \approx 2\pi. \quad (\text{B.1d})$$

Das bedeutet aber, daß in einer kleinen Umgebung um den Punkt A , um den das Flächenwesen seinen Kreis schlägt, die Euklidische Geometrie herrscht; nicht nur dort, sondern in der unmittelbaren Umgebung eines jeden Punktes auf der Kugeloberfläche ist das Verhältnis von Umfang zum Radius des Kreises 2π , genau wie in der Ebene. Diese Tatsache ergibt sich daraus, daß eine Kugeloberfläche eine RIEMANNSche (zweidimensionale) Mannigfaltigkeit ist, für die das generell – nicht nur für Kugeloberflächen – zutrifft (der Beweis dazu wird z.B. in [53] S. 158 erbracht). Wird der Radius immer größer, so wird das Verhältnis u/r immer kleiner. Ist der Radius r des Kreises schließlich ein Viertel des Kugelumfangs, entsprechend $\vartheta = 90^\circ \equiv \pi/2$, so ist das Verhältnis auf den Wert $u/r = 4$ gefallen. Die Tatsache, daß für größere Kreise das Verhältnis von Umfang zu Radius $\neq 2\pi$ ist, ist für das Flächenwesen dann ein Indiz dafür, daß seine Welt intrinsisch gekrümmt ist.

Die Kugeloberfläche als eine RIEMANNSche Mannigfaltigkeit besitzt eine Metrik (A.2b); mit den Parametern aus der Abb. B.1 ergibt sie sich zu:

$$ds^2 = R^2(d\vartheta)^2 + (R \cdot \sin\vartheta)^2(d\varphi)^2, \quad (\text{B.2a})$$

Aus dieser Formel für die Metrik der Kugeloberfläche läßt sich die Matrix $\{g_{ij}\}$ entsprechend (1.13) bestimmen:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & (R \sin\vartheta)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2b})$$

Hier wird deutlich, daß die Elemente der Matrix \mathbf{g} von der Koordinate – in diesem Fall von dem Winkel ϑ – selbst abhängen, was anzeigt, daß ein gekrümmter Raum vorliegt.

Mit Hilfe von (B.2a) kann man z.B. die Länge von Kurven bestimmen. Die Größe ds ist ja schließlich die infinitesimale Entfernung von zwei Punkten in der Mannigfaltigkeit. So ist es mit der Metrik (B.2a) leicht möglich, Radius r und Umfang u des Kreises zu berechnen. Für den Radius r , auf der Kugeloberfläche ist es ja der Kreisbogen, ist $\varphi = \text{const.}$ d.h. $d\varphi = 0$ und damit

$$r = \int_0^\vartheta ds = R \int_0^\vartheta d\vartheta = R \cdot \vartheta. \quad (\text{B.2c})$$

Für den Umfang u erhalten wir auf analoge Weise, indem ϑ konstant gehalten wird:

$$u = \int_0^{2\pi} ds = R \cdot \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R \sin \vartheta. \quad (\text{B.2d})$$

Mit Hilfe der Metrik der (zweidimensionalen) Mannigfaltigkeit der Kugeloberfläche können also die Bestimmungsstücke unseres Beispiels berechnet werden, ohne die Geometrie zu bemühen.

Anhang C

Lichtablenkung im Schwerefeld der Sonne – Newton'sches Gesetz

Die Bewegungsgleichung eines Teilchens der Masse m in einer Zentralkraft (Gravitationskraft) läßt sich in der klassischen Mechanik mit der Lagrange-Funktion in ebenen Polarkoordinaten r und θ entsprechend der Abb. C.1 als Differentialgleichung schreiben (siehe z.B. [21]):

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{GMm}{r^2} \quad (\text{C.1})$$

dabei ist M (in diesem Fall) die Sonnenmasse, G die Gravitationskonstante und l der Drehimpuls des Systems. Führt man als neue Variable $u = 1/r$ ein,

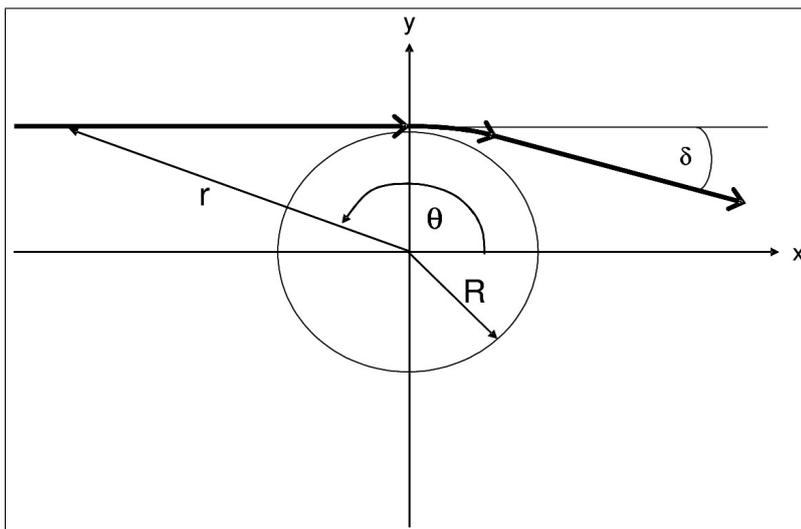


Abbildung C.1: Geometrie der Ablenkung in der x,y -Ebene; R ist dabei der Radius der Sonne und δ bezeichnet den Ablenkwinkel

so kann man die Differentialgleichung (C.1) nach [21] umformen in

$$\frac{l^2 u^2}{m} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = GM u^2 m \quad (\text{C.2})$$

Für den Drehimpuls gilt der Erhaltungssatz, das heißt, er ist konstant über die gesamte Bewegung (Kepler'sches Gesetz). Seinen Betrag erhalten wir aus der Situation an der Stelle $\theta = 90^\circ = \pi/2$ (siehe Abb. C.1):

$$l = mcR \quad (\text{C.3})$$

Dabei gehen wir davon aus, daß das Photon mit Lichtgeschwindigkeit direkt am Sonnenrand abgelenkt wird (wir können hier unbedenklich das Teilchen als Photon interpretieren, da sich die Teilchenmasse m ohnehin herauskürzt). Aus (C.2) ergibt sich mit (C.3) die endgültige Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{c^2 R^2}.$$

Mit der neuen Variablen y

$$y = u - \frac{GM}{c^2 R^2}$$

erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + y = 0$$

und mit deren Lösung schließlich für r die Gleichung

$$\frac{1}{r} = A \cdot \cos \theta + B \cdot \sin \theta + D.$$

A und B sind noch zu bestimmende Integrationskonstanten, die Konstante D hat den Wert $D = \frac{GM}{c^2 R^2}$. Die Integrationskonstanten lassen sich wie folgt bestimmen: bei $\theta = 90^\circ = \pi/2$ ist $r = R$, damit ergibt sich B zu

$$B = \frac{1}{R} - D$$

und bei $\theta = 180^\circ = \pi$ gilt $r \rightarrow \infty$ und damit $A = D$. Die Lösung der Differentialgleichung ist damit

$$\frac{1}{r} = D \cdot (1 + \cos \theta) + \left(\frac{1}{R} - D \right) \cdot \sin \theta. \quad (\text{C.4})$$

Den gesuchten Ablenkwinkel δ (siehe Abb. C.1) findet man, indem wir $r \rightarrow \infty$ gehen lassen. Aus Gleichung (C.4) erhalten wir, indem wir beide Seiten durch $D \cdot \cos \delta$ dividieren, $R \cdot D = a$ und zur Vereinfachung $\tan \delta = x$ setzen, die Gleichung für x

$$0 = \sqrt{1 + x^2} + 1 + \frac{1}{a} x - x$$

mit der Lösung

$$x = -2a \frac{(a-1)}{2a-1}.$$

Daraus ergibt sich als Ergebnis für den Ablenkwinkel δ die endgültige Beziehung

$$\delta = \arctan \left[- \frac{2GM}{c^2 R} \cdot \frac{\left(\frac{GM}{c^2 R} - 1 \right)}{\left(\frac{2GM}{c^2 R} - 1 \right)} \right]. \quad (\text{C.5})$$

Setzt man die Werte der Sonne für den Radius R und der Masse M sowie den Wert für die Lichtgeschwindigkeit c in die Größe $\frac{GM}{c^2 R} = a$ ein, so erhält man für sie einen Wert von $a \approx 2,1 \cdot 10^{-6}$. Das heißt, daß wir den zweiten Bruchausdruck in (C.5) mit hinreichender Genauigkeit gleich eins setzen können. Für den Ablenkwinkel ergibt sich damit

$$\delta \approx \arctan \left(- \frac{2GM}{c^2 R} \right).$$

Den arctan in Reihe entwickelt und nach dem ersten Glied abgebrochen (das zweite Glied ist schon in der 3. Potenz des Argumentes), ergibt für δ mit den konkreten Werten der Sonne

$$\delta \approx - \frac{2GM}{c^2 R} \quad \text{oder} \quad \delta \approx -0,875''.$$

Mit dem Schwarzschildradius $\mathfrak{R} = \frac{2GM}{c^2}$ erhalten wir

$$\delta \approx - \frac{\mathfrak{R}}{R}.$$

Dies ist genau der halbe Wert dessen, den EINSTEIN mit der Allgemeinen Relativitätstheorie berechnet hat und der auch in dieser Größe gemessen wurde (die aktuellen Meßwerte liegen bei $\delta = 1,73'' \pm 0.05''$).

Anhang D

Geometrische und Planck-Einheiten

Geometrische Einheiten: Im der folgenden Tabelle sind die Werte einiger wichtiger Konstanten sowohl in den geläufigen SI-Einheiten als auch in geometrischen Einheiten aus [53] aufgeführt.

Konstante	SI-Wert	Geometrischer Wert
c	$2,998 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$	1
G	$6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	1
\hbar	$1,055 \cdot 10^{-34} \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-1}$	$2,612 \cdot 10^{-70} \text{ m}^2$
m_e	$9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$6,764 \cdot 10^{-58} \text{ m}$
m_p	$1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$1,242 \cdot 10^{-54} \text{ m}$
M_{\odot}	$1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	$1,477 \cdot 10^3 \text{ m}$
M_{\oplus}	$5,973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$4,435 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
L_{\odot}	$3,90 \cdot 10^{26} \text{ kgm}^2 \text{ s}^{-3}$	$1,07 \cdot 10^{-26}$

Tabelle D.1: Vergleich der Werte verschiedener wichtiger Konstanten in SI-Einheit und geometrische Einheit

Die Konstanten m_e und m_p sind die Elektronenmasse resp. die Protonenmasse. M_{\odot} steht für die Sonnenmasse, M_{\oplus} für die Masse der Erde und L_{\odot} ist die Leuchtkraft der Sonne.

Planck-Einheiten: Im Jahr 1913 zeigte MAX PLANCK, daß sich aus den Naturkonstanten Gravitationskonstante G , der Lichtgeschwindigkeit c und dem Planckschen Wirkungsquantum $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ durch geeignete Kombination natürliche Einheiten für die Länge, die Zeit und für die Masse bilden lassen. Was zunächst wie Zahlenmystik aussieht, läßt sich aber auch physikalisch

erklären.

In der Quantenmechanik ist die Meßgenauigkeit, mit der der Impuls und der Ort eines Teilchens (oder auch einer Welle) gemessen werden kann, durch die HEISENBERGSche Unschärferelation begrenzt. Sie ist gegeben durch die Beziehung

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{D.1})$$

Wird also der Ort eines Teilchens mit einer Genauigkeit Δx gemessen, so ist sein Impuls nur mit der Genauigkeit $\Delta p = \frac{\hbar}{2\Delta x}$ bestimmt. Selbst ein Teilchen ohne Ruhemasse – z.B. ein Photon – ist mit einer Energie verbunden und damit über die EINSTEINSche Beziehung mit einer Masse verbunden. Für (D.1) kann man daher schreiben

$$m \cdot c^2 = E = \Delta p \cdot c = \frac{\hbar c}{2\Delta x_Q}.$$

Daraus läßt sich die Länge Δx_Q bestimmen, wobei der Wert 2 vernachlässigt werden soll (es geht hier nur um die Größenordnung und die Dimensionen):

$$\Delta x_Q = \frac{\hbar}{m \cdot c} \quad (\text{D.2})$$

Δx_Q ist umso kleiner, je größer die Masse des Teilchens ist. Damit ist die Genauigkeit, mit der man im Rahmen der Quantenmechanik den Ort des Teilchens bestimmen kann, umso größer, je größer seine Masse ist.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie gibt es nun auch eine Untergrenze der Genauigkeit, mit der der Ort eines Teilchen der Masse m bestimmt werden kann; es ist der Schwarzschildradius \mathfrak{R} . Ist die Masse auf eine Größe unterhalb dieses Radius geschrumpft, so läßt sich ihre Größe nicht mehr bestimmen, die Genauigkeit der Ortsbestimmung ist durch den Schwarzschildradius festgelegt. Wie er bestimmt wird hatten wir in (2.16) auf Seite 50 beschrieben. Vernachlässigen wir auch hier den Wert 2, so erhalten wir für die Genauigkeit der Ortsbestimmung Δx_A in der Allgemeinen Relativitätstheorie:

$$\Delta x_A = \frac{G \cdot m}{c^2} \quad (\text{D.3})$$

Setzt man nun $\Delta x_Q = \Delta x_A$, so erhält man die Masse eines Teilchen, bei der die quantentheoretische Unschärfe gleich der der Allgemeinen Relativitätstheorie ist. Diese Masse nennt man die Planck-Masse m_P . Sie bestimmt sich, wenn man (D.2) und (D.3) gleich setzt zu

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c}{G}} = 2,17645 \cdot 10^{-8} \text{ kg}. \quad (\text{D.4})$$

Hier wird der Grenzcharakter der Planck-Masse deutlich: ist die Masse des Teilchens kleiner als sie, dann verhindert die Quantentheorie eine genauere Ortsbestimmung. Ist sie aber (in einem schwarzen Loch vereinigt) größer als die Planck-Masse, dann ist die Allgemeine Relativitätstheorie der limitierende

Faktor. Die „minimale Lokalisierungslänge“ [6] l_P – die Planck-Länge – ergibt sich, indem man die Planck-Masse entweder in (D.2) oder in (D.3) einsetzt:

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^3}} = 1,61624 \cdot 10^{-35} \text{ m.} \quad (\text{D.5})$$

Für die Zeit, die das Licht braucht, um die Entfernung l_P zurückzulegen, wird der Begriff der Planck-Zeit t_P eingeführt. Sie ergibt sich einfach als

$$t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\frac{\hbar \cdot G}{c^5}} = 5,39121 \cdot 10^{-44} \text{ sec.} \quad (\text{D.6})$$

Den Zusammenhang zwischen Energie und Temperatur aus (4.3) auf Seite 132 kann man schließlich nutzen, um die Planck-Temperatur T_P zu definieren:

$$T_P = \frac{m_P \cdot c^2}{k} = \sqrt{\frac{\hbar \cdot c^5}{G \cdot k^2}} = 1,41679 \cdot 10^{32} \text{ K.} \quad (\text{D.7})$$

Am Beispiel der bisher beschriebenen Planck-Einheiten wird deutlich, warum bei ihrer Herleitung immer der Faktor 2 vernachlässigt wurde; die Einheiten sollen eben MAX PLANCKS Vorstellung entsprechen, nur aus fundamentalen Naturkonstanten gebildet zu werden. Neben den oben beschriebenen lassen sich noch viele mehr herleiten; dazu sei aber auf das Schlagwort Planck-Einheiten unter Wikipedia hingewiesen. Dort findet sich auch einiges über die Geschichte der Verwendung dieser Einheiten.

Anhang E

Glossar

Äquivalenzprinzip (engl.: Equivalence principle) Es besagt, daß \rightarrow schwere und \rightarrow träge Masse von Körpern beliebiger Form oder Beschaffenheit äquivalent sind. Das bedeutet, daß alle Körper im Vakuum gleich schnell fallen.

Annihilation bedeutet die gegenseitige Vernichtung von einem Teilchen und seinem Antiteilchen bei gleichzeitiger Erzeugung von Strahlung mit einer Energie, die dem Masseäquivalent ($E = mc^2$) der beiden Teilchen entspricht.

Anthropisches Prinzip (engl.: Anthropic principle) BRANDON CARTER führte 1974 dieses Prinzip ein mit der Definition „was wir erwarten, beobachten zu können, muß den Bedingungen genügen, die für unsere Existenz als Beobachter notwendig sind“ [24]. Es besagt letztendlich, daß die Entwicklung des Universums die menschliche Existenz zum Ziel hat (Teleologie).

Baryonen (engl.: Baryons) Es sind Elementarteilchen bestehend aus jeweils drei Quarks; die wichtigsten Vertreter sind das Proton und das Neutron, aus denen die Atomkerne aller Materie bestehen.

Bezugssystem (engl.: Frame of reference) Mit Hilfe eines Bezugssystems – auch Referenzsystem genannt – gibt man an, wo und wann ein bestimmtes Ereignis stattfindet. In der Relativitätstheorie benutzt man ein 4-dimensionales \rightarrow Raum-Zeit-Diagramm, um Ereignisse in Raum und Zeit darzustellen.

Big bang siehe: Urknall

Cepheiden (engl.: Cepheids) Es sind pulsationsveränderliche Sterne mit einer sehr regelmäßigen Veränderlichkeit ihrer Leuchtkraft. Die Astronomin LEAVITT hatte 1912 festgestellt, daß zwischen der (mittleren) absoluten Helligkeit (Leuchtkraft) der Cepheiden und ihrer Pulsationsperioden ein genereller Zusammenhang besteht, den man zur Entfernungsbestimmung nutzen kann; Cepheiden dienen also als \rightarrow Standardkerzen zur Entfernungsbestimmung im Universum.

Corioliskraft (engl.: Coriolis force) Corioliskraft ist eine Schein- oder Trägheitskraft, die auf einen Körper wirkt, dessen Bewegung in einem rotierenden →Bezugssystem beschrieben wird. Die Corioliskraft bewirkt die Rotation der Hoch- und Tiefdrucksysteme auf der Nord- und Südhalbkugel der Erde.

Coulombkraft (engl.: Coulomb force) Sie beschreibt die Kraft, die sich zwischen zwei elektrischen Ladungen aufbaut; sie kann je nach Vorzeichen der Ladungen anziehend oder abstoßend sein: Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab, solche mit unterschiedlichem Vorzeichen ziehen sich an.

Dark matter siehe: Dunkle Materie

Distanzmodul (engl.: Distance modulus) Bezeichnet m die scheinbare und M die absolute →Helligkeit eines astronomischen Objektes, so wird die Differenz $m - M$ als Distanzmodul bezeichnet.

Doppler-Effekt (engl.: Doppler effect) Sendet ein bewegtes Objekt Schall- oder Lichtwellen aus, so nimmt ein Beobachter eine Frequenzänderung der ausgesandten Wellen wahr oder kann sie messen. Nähern sich Quelle und Beobachter relativ zueinander, so erfolgt eine Frequenzerhöhung (bei Licht eine Blauverschiebung), entfernen sie sich voneinander, so zeigt sich eine Frequenzerniedrigung (bei Licht eine Rotverschiebung).

Dunkle Energie (engl.: Dark energy) Sie bezeichnet in der Kosmologie eine hypothetische Energieform, die die beschleunigte Expansion des Universums erklären soll. Neuere Messungen der Rotverschiebung weit entfernter Galaxien deuten auf diese beschleunigte Expansion hin. Einstein hatte ursprünglich die →kosmologische Konstante Λ eingeführt, um ein statisches Universum mit seinen Feldgleichungen zu beschreiben; von M.S. TURNER wurde 1988 diese Konstante verallgemeinert und in die kosmologischen Modelle als dunkle Energie (wieder) eingeführt.

Dunkle Materie (engl.: Dark matter) Eine bis heute rätselhafte Form von Materie in der modernen Kosmologie, die optische nicht wahrgenommen werden kann, und die nur als Folge ihrer gravitativen Wirkung nachweisbar ist. Man unterscheidet drei Arten Dunkler Materie

- *Baryonische Dunkle Materie* – auch als MACHOS (Massive Compact Halo Objects) bezeichnet, besteht aus normaler Materie, die aber nicht oder noch nicht nachweisbar ist. Beispiele wären interstellares Gas, erloschene Sterne, braune Zwerge, Schwarze Löcher, Planeten etc.
- *Kalte Dunkle Materie* (Cold Dark Matter – CDM) – besteht aus hypothetischen (Elementar-)Teichen geringer Geschwindigkeit – WIMPS (Weakly Interacting Massive Particles). Kandidaten dafür sind bisher nur theoretische vorhergesagte Elementarteilchen wie z.B. Neutralinos oder Axionen.

- *Heiße Dunkle Materie* (Hot Dark Matter – HDM) – Diese Art der Dunklen Materie bewegt sich mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit. Kandidaten dieser Art sind z.B. Neutrinos.

Das →Standardmodell der Kosmologie sagt aus, daß der größere Teil der Materie im Universum aus Dunkler Materie besteht: ca. 4 % „normale“ Materie und ca. 21 % Dunkle Materie. Der Rest von ca. 75 % entfällt auf das Masseäquivalent der Dunklen Energie (siehe vorhergehender Punkt).

Eigenabstand (engl.: Comoving distance, proper distance) ist die Entfernung von der Erde zur einer gerade beobachteten Galaxie zum heutigen Zeitpunkt, eine (unbeobachtbare) Entfernung die nur berechnet werden kann. Das Licht einer weit entfernten Galaxie z.b., das uns heute erreicht, wurde zu einem Zeitpunkt ausgesandt, als sich diese Galaxie in der Entfernung des →Emissionsabstandes befand. Durch die Expansion des Universums hat sich aber die Galaxie bis zu dem (heutigen) Eigenabstand von uns entfernt.

Eigengeschwindigkeit (engl.: Proper velocity) definiert die Geschwindigkeit, mit der sich ein kosmisches Objekt infolge der Expansion des Raumes von uns entfernt. Zugrunde liegt das →Geschwindigkeit-Entfernungs-Gesetz, nach dem die Eigengeschwindigkeit linear mit dem →Eigenabstand anwächst.

Eigenzeit (engl.: Proper time) ist die Zeit, die mit einer bewegten Uhr zwischen zwei Ereignissen gemessen wird. Aufgrund der Speziellen Relativitätstheorie geht eine bewegte Uhr langsamer als die relativ zu ihr bewegte. Den Zusammenhang wird durch die →Zeitdilatation beschrieben.

Elektromagnetische Wechselwirkung (engl.: Electromagnetic force)
→Grundkräfte.

Emissionsabstand (engl.: Emission distance) bezeichnet die Entfernung eines kosmischen Objektes zu uns auf der Erde zum Zeitpunkt der Emission des Lichtes.

Energie-Impuls-Tensor (engl.: Stress-energy tensor) Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie bestimmen die Massen oder entsprechende Massenverteilungen die Geometrie des Raumes. Mathematisch werden die Masse bzw. die Massenäquivalente von Energien in dem Energie-Impuls-Tensor zusammengefaßt, eine 4x4-Matrix, deren Komponenten die Energiedichte, den Energiefluß, den Druck, die Impulsdichte und -fluß sowie die Scherspannung beinhalten. In den kosmologischen Modellen hat man meist eine einfache Version des Energie-Impuls-Tensors, der nur die Energiedichte und den Druck enthält.

Ereignishorizont (engl.: Event horizon) ist eine Begrenzung in der Raumzeit, die im Zusammenhang mit →schwarzen Löchern auftritt. Die Gravitationskraft solcher schwarzer Löcher ist so stark, daß selbst Licht nicht den Ereignishorizont überschreiten kann.

Falsches Vakuum (engl.: False vacuum) ist in Quanten-Feld-Theorie ein metastabiler Zustand des Raumes; in der Materie dieses falschen Vakuums herrscht ein negativer Druck. In den kosmologischen Modellen bewirkt ein negativer Druck eine beschleunigte Expansion des Raumes und wird als Ursache für die →Inflation kurz nach dem Urknall angesehen. Diese Vorstellung geht unter andere auf ALAN GUTH zurück.

Fernwirkung, instantane (engl.: Instantaneous action-at-a-distance) Nach NEWTON wirkt die Anziehungskraft eines Körpers unmittelbar ohne Zeitverzögerung auf einen anderen, unabhängig davon wie weit beide voneinander entfernt sind. EINSTEIN zeigte aber, daß sich auch die Gravitationswirkung höchstens mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt.

Flachheits-Problem (engl.: Flatness problem) Durch astronomische Beobachtungen stellte man schon in den 70er Jahren fest, daß im Universum eine Euklidische Geometrie herrschen mußte, d.h. daß das Universum flach ist. Berücksichtigt man aber die Theorie vom Urknall, so müßte die weitere Entwicklung zu einem flachen Universum extrem unwahrscheinlich sein. Die Idee der →Inflation beseitigt diese Schwierigkeit.

FLRW-Metrik (engl.: FLRW metric) ist die in der Kosmologie genutzte Metrik des Raumes. Benannt ist sie nach FRIEDMANN, LEMAÎTRE, ROBERTSON und WALKER. Sie ist eine exakte Lösung der EINSTEINSchen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie für einen homogene und isotropen Raum.

Fluchtgeschwindigkeit hat im Deutschen zwei unterschiedliche Bedeutungen:

1. als Geschwindigkeit, die erforderlich ist, um der Schwerkraft eines Himmelskörpers zu entkommen (engl.: escape velocity); auf der Erde ist sie z.B. 11,2 km/sec;
2. als Geschwindigkeit, mit der sich scheinbar ferne Galaxien nach dem Hubbleschen Gesetz von uns entfernen (engl.: recessional velocity).

Geodäte (engl. geodesic) ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten in einem Raum. In dem Euklidischen Raum entspricht die Geodäte einer Gerade, in einem gekrümmten Raum einer Kurve, die zwei Punkte in kürzester Entfernung verbindet. Auf einer Kugeloberfläche – ein 2-dimensionaler gekrümmter „Raum“ – ist die Geodäte ein Abschnitt auf dem →Großkreis.

geometrische Einheiten (engl.: Geometrized units) In der Literatur über Allgemeine Relativitätstheorie und Kosmologie werden häufig die Naturkonstanten der Lichtgeschwindigkeit c und der Gravitationskonstanten G dimensionslos und gleich eins gesetzt. Die dadurch einfacher werdenden Formeln werden aber erkauft durch eher ungewöhnliche Einheiten für z.B. Längen, Geschwindigkeiten, Kraft o.ä.

Geschwindigkeits-Entfernungs-Gesetz (engl.: Velocity-distance law) In einem expandierenden Raum hängt die Geschwindigkeit, mit der sich ein (kosmisches) Objekt von dem Beobachter entfernt linear von der Entfernung nach der Beziehung

$$V(t) = H(t) \cdot L(t)$$

ab. Dabei ist $H(t)$ die \rightarrow Hubble-Funktion. D.h. je weiter ein Objekt von dem Beobachter entfernt ist, umso schneller entfernt es sich von ihm. Betrachten wir die heutige Situation, d.h. $t = t_0$, so gilt

$$V_p(t_0) = H_0 \cdot L_p(t_0)$$

mit $V_p(t_0)$ als \rightarrow Eigengeschwindigkeit, H_0 als \rightarrow Hubble-Konstante und $L_p(t_0)$ als \rightarrow Eigenabstand.

Gluonen (engl.: Gluons) sind Elementarteilchen, genauer Austauscheteilchen, die die Bindung der Neutronen und Protonen im Atomkern bewirken.

Gravitation (engl.: Gravitation) \rightarrow Grundkräfte.

Großkreis (engl.: Great circle) ist der größtmögliche Kreis auf einer Kugeloberfläche. Sein Mittelpunkt fällt immer mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammen.

Grundkräfte (engl.: Fundamental interactions) Die Physik unterscheidet fünf Grundkräfte, auch Wechselwirkungen genannt:

- *Gravitation* dominiert die großräumigen Strukturen des Universums;
- *schwache Wechselwirkung* ist verantwortlich für radioaktive Zerfallsprozesse;
- *elektromagnetische Wechselwirkung* hält Atome und Moleküle zusammen und
- *starke Wechselwirkung* hält die Atomkerne zusammen.

Die Stärken dieser Kräfte unterscheiden sich erheblich; ordnet man z.B. der Stärke der Gravitations-Kraft den Wert eins zu, dann erkennt man in folgender Tabelle die Unterschiede:

Gravitation	\propto	1
SchwacheWechselwirkung	\propto	10^{25}
ElektromagnetischeWechselwirkung	\propto	10^{36}
StarkeWechselwirkung	\propto	10^{38} .

GUT GRAND UNIFIED THEORY ist eine von verschiedenen Theorien der Teilchenphysik, die vorhersagt, daß bei extrem hohen Energien resp. Temperaturen die vier \rightarrow Grundkräfte der Natur zu einer einheitlichen Grundkraft verschmelzen.

Hadron ist ein Teilchen aus der Familie, deren Mitglieder der starken Wechselwirkung unterworfen sind. Die wichtigsten Vertreter sind die Baryonen, das Neutron, das Proton und die entsprechenden Antiteilchen, sowie die Mesonen.

Helligkeit (engl.: Luminosity) Unter diesem Begriff versteht man die Stärke einer visuellen Wahrnehmung von Licht. In der Astronomie unterscheidet man

- *Die scheinbare Helligkeit* die Stärke der Wahrnehmung eines Sternes. Gemessen wird sie in sog. Magnitudines und ausgedrückt durch die Größe m , in einer logarithmischen Skala, wobei je höher der Zahlenwert, umso geringer die Stärke der Wahrnehmung. Man unterscheidet darin noch die visuelle (scheinbare) Helligkeit, die über den gesamten für das menschliche Auge wahrnehmbaren Spektralbereich integriert wird, von (scheinbarer) Helligkeit in bestimmten Spektralbereichen, z.B. UV, blau oder rot.
- *Die absolute Helligkeit*, mit M bezeichnet, ist so definiert, daß man sich die Sterne in einer einheitlichen Entfernung von 10 Parsec [Pc] (= 32,6 Lichtjahre) befindlich denkt.

Unsere Sonne z.B. hat eine scheinbare (visuelle) Helligkeit von $m = -26,7$ und eine absolute (visuelle) Helligkeit von $M = 4,87$.

Hintergrundstrahlung (engl.: Cosmic background radiation CBR) erfüllt das gesamte Universum; es ist eine elektromagnetische Strahlung von einer Temperatur von 2,73 Kelvin. Ihr Spektrum entspricht mit höchster Genauigkeit der eines schwarzen Körpers dieser Temperatur. Sie ist isotrop über alle Himmelsrichtungen bis auf geringste Schwankungen in der Größenordnung 0,0001 %. Nach der gängigen Theorie ist die alles umfassende Temperatur kurz nach dem Urknall durch die Expansion des Universums bis auf den heutige Wert abgekühlt.

Horizont (engl.: Horizon) ist in der Allgemeinen Relativitätstheorie eine Grenze in der Raum-Zeit, hinter der ein Ereignis einen jenseitigen Beobachter nicht beeinflussen kann. Licht z.B., das von jenseits des Horizonts ausgesandt wird kann einen Beobachter nie erreichen. Kausale Beeinflussungen zwischen Objekten können nur innerhalb des Horizonts stattfinden, da alle physikalischen Wirkungen sich mit höchstens Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Horizont-Problem (engl. Horizon problem) Es beschreibt die Schwierigkeit zu erklären, warum die →Hintergrundstrahlung dermaßen isotrop ist, da doch zum Zeitpunkt ihres Entstehens, bei der →Rekombination etwa 400.000 Jahre nach dem Urknall, der →Horizont so klein war, daß er nur einen kleinen Bruchteil des (damaligen) Universums umfaßte. Ereignisse innerhalb des Horizonts konnten unmöglich Einfluß nehmen auf Bereiche außerhalb des Horizonts und so für eine Isotropie sorgen. Das Horizont-Problem gab schließlich u.a. den Anstoß, eine Lösung dafür durch die Theorie der →Inflation zu suchen.

Hubble-Funktion (engl.: Hubble term) Die Hubble-Funktion $H(t)$ beschreibt die zeitliche Änderung des \rightarrow Skalenfaktors mit der Zeit:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

Dabei ist $a(t)$ der Skalenfaktor und der Punkt bezeichnet die erste Ableitung nach der Zeit.

Hubble-Konstante (engl.: Hubble's constant) Die Hubble-Konstante H_0 bezeichnet den Wert der Hubble-Funktion zum heutigen Zeitpunkt. Ihre Dimension ist $[1/Zeit]$ und ihr (momentan genauester) Wert ist

$$H_0 = 74,2 \pm 3,6 \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}.$$

Die Hubble-Konstante taucht in praktische allen Formeln der Kosmologie auf. Aus diesem Grund schreibt man dafür häufig

$$H_0 = 100 \cdot h,$$

wobei die Größe h quasi unser Unwissen über den genauen Wert der Hubble-Konstanten ausdrückt; für sie gilt $0,5 \leq h \leq 1,0$. Die Ergebnisse kosmologischer Formeln enthalten immer die Größe h , für die man dann den jeweils aktuellsten Wert einsetzen kann.

Hubble-Länge (engl.: Hubble length) Die \rightarrow Fluchtgeschwindigkeit kosmischer Objekte erreicht mit wachsender Entfernung schließlich Lichtgeschwindigkeit. Die Entfernung, bei der das passiert, wird als Hubble-Länge $L_H(t)$ bezeichnet

$$L_H(t) = \frac{c}{H(t)}$$

und ihre heutige Größe bestimmt sich aus der \rightarrow Hubble-Konstanten zu

$$L_H^{heute} = \frac{c}{H_0} \approx 4.000 \text{ Mpc}.$$

Hubble-Parameter (engl.: Hubble term) siehe Hubble-Funktion.

Hubble-Periode (engl.: Hubble period) Die Hubble-Periode t_H ist definiert als

$$t_H = 1/H_0.$$

Der Wert H_0 ist gleichbedeutend mit der Steigung der Tangente an die Kurve der Funktion des \rightarrow Skalenfaktors $a(t)$ zum heutigen Zeitpunkt t_0 . Die Hubble-Periode gibt also die Zeitdifferenz zwischen dem Schnittpunkt der Tangente mit der Zeitachse und dem heutigen Zeitpunkt t_0 an. Die Hubble-Periode entspricht nur bei einem gleichmäßig expandierenden Universum dem Weltalter. Bei einem beschleunigt expandierenden Universum ist die Hubble-Periode kürzer, bei einem gebremst expandierenden Universum ist sie größer.

Hubble-Sphäre (engl.: Hubble sphere) ist der kugelförmige Raumbereich mit der Erde als Zentrum und der →Hubble-Länge als Radius.

Hypersphäre (engl.: Hypershere) oder n-Sphäre ist die Oberfläche einer n-dimensionalen „Kugel“; für $n = 2$ ist sie der Kreis, für $n = 3$ entspricht sie der Kugeloberfläche.

Inertialsystem (engl.: Inertial frame) In der Physik ist ein Inertialsystem ein Koordinatensystem, in dem sich Körper geradlinig und gleichförmig bewegen. In diesen Systemen gilt das NEWTONsche Trägheitsgesetz. Unterschiedliche Inertialsysteme bewegen sich untereinander geradlinig und gleichförmig.

Inflation (engl.: Cosmic inflation) bezeichnet die exponentielle Expansion des Universums kurz nach dem Urknall. Diese Hypothese wurde 1980 von dem Physiker ALAN GUTH vorgeschlagen, um das →Flachheits-Problem und das →Horizont-Problem zu lösen.

Kosmologische Konstante (engl.: Cosmological constant) wurde mit der Bezeichnung Λ ursprünglich von EINSTEIN in seine Feldgleichungen eingeführt, um bei seinen kosmologischen Überlegungen ein statisches Universum sicher zu stellen. Nachdem von HUBBLE aus astronomischen Beobachtungen die Expansion des Universums nachgewiesen wurde, zog EINSTEIN sie wieder zurück. In neuerer Zeit spielt die kosmologische Konstante – auch als Vakuumenergiedichte bezeichnet – wieder eine wichtige Rolle als Zeichen für die →dunkle Energie und zur Erklärung für eine beschleunigte Expansion des Universums. Die Einheit der kosmologischen Konstante ist $[1/s^2]$ und man kann die Konstante als Energiegehalt des leeren Raumes auffassen, deswegen auch die Bezeichnung „Vakuumenergiedichte“. Der aus der Beobachtungen ermittelte Wert von Λ ist im heutigen Universum um etwa 10^{120} Größenordnungen kleiner als die Quantentheorie des Vakuums voraussagt, ein Problem, das bisher noch nicht gelöst ist.

Kosmologische Modelle (engl.: Universes) sind Lösungen der Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie unter Annahmen über das Universum, z.B. Homogenität und Isotropie, und über die verschiedenen Werten der freien Parameter, die in den Feldgleichungen auftreten. Letztendlich beschreiben sie die Änderung des →Skalenfaktors mit der Zeit.

Kosmologisches Prinzip (engl.: Cosmological principle) ist eine Annahme über das Wesen unseres Universums. Es sagt aus, daß das Universum *homogen* und *isotrop* ist; das bedeutet, daß an jeder Stelle des Universums, auch an für uns noch nicht erschlossene, es gleichartig ist – Homogenität – und daß es, unabhängig davon, in welche Richtung man auch schaut, immer gleich –Isotropie – aussieht.

Krümmung (engl.: Curvature) Intuitiv beschreibt Krümmung die Abweichung eines geometrischen Objektes von der Flachheit. Für eine zweidimensionale Kurve z.B. wird ihre Krümmung in einem bestimmten Punkt beschrieben durch einen Kreis mit einem „Krümmungsradius“, dergestalt, daß er sich optimal in diesem Punkt an die Kurve anschmiegt. Die Krümmung der Kurve in diesem Punkt ist dann definiert als Kehrwert des Krümmungsradius. Bei einer (gewölbten) Fläche macht sich die Krümmung in einem Punkt durch die zunehmende Abweichung der Fläche von ihrer Tangentialebene in diesem Punkt bemerkbar.

kritische Energiedichte (engl.: critical energy density) Entsprechend dem EINSTEINSchen Energieäquivalent $E = m \cdot c^2$ entspricht die kritische Energiedichte zum heutigen Zeitpunkt $\varepsilon_{c,0}$ der mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit multiplizierten \rightarrow kritischen Massendichte:

$$\varepsilon_{c,0} = \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2 \approx 8,8 \cdot 10^{-10} \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right].$$

kritische Massendichte (engl.: critical mass density) Das Einstein-de Sitter Modell, bei dem die \rightarrow kosmologische Konstante den Wert Null hat, führt bei einer Dichte des homogenen und isotropen Universums, die genau der kritischen Massendichte $\varrho_{c,0}$ zum heutigen Zeitpunkt entspricht, auf ein Universum mit Euklidischer Geometrie, ein flaches Universum. Der Wert der kritischen Massendichte $\varrho_{c,0}$ ist gegeben durch die \rightarrow Hubble-Konstante und die Gravitationskonstante G :

$$\varrho_{c,0} = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \approx 9,7 \cdot 10^{-27} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right].$$

Kugelkoordinaten (engl.: Spherical coordinates) Bei Kugelkoordinaten wird ein Punkt im Raum durch die Entfernung dieses Punktes vom Ursprung und durch zwei Winkel festgelegt. Ist die Entfernung vom Ursprung konstant, dann genügen die zwei Winkel um den Punkt auf der dann vorhandene Kugeloberfläche eindeutig zu bestimmen, z.B. die (geographische) Länge und Breite auf der Erdoberfläche.

Λ CDM-Modell (engl.: Lambda-CDM model) Das Λ CDM-Modell ist das gegenwärtige Standardmodell der Kosmologie; es berücksichtigt die \rightarrow kosmologische Konstante Λ als Repräsentant für die \rightarrow dunkle Energie und die \rightarrow dunkle Materie (Cold Dark Matter – CDM). Aufgrund der kosmologischen Konstante ergibt sich eine beschleunigte Expansion des Universums.

Leptonen (engl. Leptons) sind eine Familie von Elementarteilchen. Zu ihnen gehören das Elektron, das Myon und das Tauon sowie deren Neutrinos.

Leuchtkraft (engl.: Luminosity) Als Leuchtkraft L_* bezeichnet man in der Astronomie die Energie, die z.B. ein Stern pro Zeiteinheit in den Raum abstrahlt, gemessen über das gesamte Spektrum; die Einheit der Leuchtkraft wird in Watt (manchmal auch erg) pro Sekunde angegeben.

Leuchtkraftentfernung (engl.: Luminosity distance) Ist die Leuchtkraft L_* eines astronomischen Objektes (Stern, Galaxie,...) bekannt, dann kann man die Leuchtkraftentfernung L des Objektes aus der Beziehung

$$\Phi = \frac{L_*}{4\pi L^2}$$

berechnen; dabei ist Φ der Strahlungsstrom, gemessen in W m^{-2} außerhalb der Erdatmosphäre. Dieser einfache Zusammenhang gilt nur, wenn man eine Euklidische Geometrie des Raumes voraussetzen kann und keine Expansion des Raumes vorliegt. Im anderen Fall muß man kosmologische Modelle zugrunde legen, um die Leuchtkraftentfernung zu bestimmen.

Lichtablenkung (engl.: Light deflection) Die Photonen des Lichtes besitzen zwar keine Masse aber Energie; nach dem EINSTEINSchen Gesetz $E = m \cdot c^2$ kann man ihnen daher doch eine Masse zusprechen und unterliegen damit dem Gesetz der gegenseitigen Anziehung von Massen. So war schon lange vor EINSTEIN bekannt, daß das Licht von Sternen an der Sonne abgelenkt werden muß. Mit der Allgemeinen Relativitätstheorie konnte aber erstmals der korrekte Wert dieser Lichtablenkung an der Sonne berechnet werden. Mit dieser Theorie gelingt es auch z.B. große Massen dunkler Materie im Universum aufgrund ihres Einflusses – Gravitationslinsen – auf das Licht hinter ihnen liegender Objekte zu identifizieren.

Magnetischer Monopol (engl.: Magnetic monopole) Bei Magneten existiert immer ein (magnetischer) Nord- und ein Südpol; eine Trennung ist nicht möglich. In der Teilchenphysik wird aber doch die Existenz eines hypothetischen magnetischen Monopols vorausgesagt, obgleich noch nie experimentell nachgewiesen (siehe dazu auch das Stichwort Monopol-Problem).

Mannigfaltigkeit (engl.: Manifold) Von einer Mannigfaltigkeit spricht man in der Mathematik, speziell in der Differentialgeometrie oder Topologie, wenn man einen (mathematischen) Raum beschreibt, der in einem hinreichend kleinen Bereich dem Raum der Euklidischen Geometrie ähnelt. Der Raum selbst kann beliebige Dimensionen haben und muß selbst in seiner Gesamtheit nicht Euklidische sein. Ein einfaches Beispiel für eine (zweidimensionale) Mannigfaltigkeit ist die Oberfläche einer Kugel, z.B. der Erdkugel; in ihrer Gesamtheit ist sie nicht Euklidische, betrachtet man aber einen winzigen Ausschnitt davon, z.B. den Bereich einer Stadt, so kann man diesen mit der Euklidischen Geometrie beschreiben.

Materie-Ära (engl.: Matter era) In der Materie-Ära überwiegt die Energiedichte der Materie die anderer Energiedichten – speziell der Energiedichte der Strahlung. Zum Zeitpunkt nach ca. 100.000 Jahre nach dem Urknall tritt diese Situation ein und gilt bis zum heutigen Zeitpunkt. Vor diesem Zeitpunkt ist die Energiedichte der Strahlung größer als die der Materie; zeitlich rückwärts bis zum Urknall haben wir es also mit der →Strahlungs-Ära zu tun.

Metrik (engl.: Metric) Die Metrik beschreibt in der Mathematik, speziell in der (Differential-) Geometrie die Entfernung zwischen zwei Punkten des Raumes. Die Art des Raumes, ob Euklidisch oder nicht, bestimmt die Form der Metrik (die spezielle Formel für die Entfernung) und umgekehrt legt der spezielle Ausdruck der Metrik – die Formel für den Abstand – die Art der Geometrie fest.

Mitbewegtes Koordinatensystem (engl.: Comoving reference frame) In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist man frei in der Wahl eines Koordinatensystems, in dem man die Physikalischen Gesetze beschreiben will. Im expandierenden Raum der Kosmologie hat sich aber das mitbewegte Koordinatensystem als natürlich herausgestellt, da es konstante Raumkoordinaten einem Beobachter zuordnet, der den Raum als isotrop wahrnimmt. Stellt man sich dazu einen aufblasbaren Globus vor mit seinem Koordinatensystem Länge und Breite. Zwei Punkte auf dem Globus, z.B. die Stadt Frankfurt und Hamburg, behalten ihre Koordinaten, auch wenn der Globus aufgeblasen wird – mitbewegte Koordinaten. Die metrische Entfernung zwischen den beiden Punkten, gemessen entlang dem Großkreis, vergrößert sich aber beim Aufblasen; die jeweils gemessene Entfernung entspricht dann der →Eigenentfernung.

Monopol-Problem (engl.: Monopole problem) Nach den „großen vereinheitlichten Theorien“ →GUT müßte es Elementarteilchen geben, die nur eine magnetische Ladung – entweder Nord- oder Südpol – tragen. Außerdem sollten sie unter den extremen Bedingungen des frühen Universums ganz kurz nach dem Urknall entsprechend dieser Theorien erzeugt worden sein. Da sie aber noch nie beobachtet wurden, spricht man von dem Monopol-Problem. Eine Lösung des Problems scheint die Hypothese der →Inflation zu bieten, indem die früh entstandene Menge der magnetischen Monopole durch die gewaltige Expansion des Raumes während dieses Ereignisses so stark verdünnt wurde, daß heute keine Chance besteht, noch ein Exemplar nachzuweisen.

Myon (engl.: Muon) ist ein Elementarteilchen, das dem Elektron ähnelt – negative Ladung und Spin $\frac{1}{2}$, aber eine deutlich größere Masse besitzt.

Newtonsche Kosmologie (engl.: Newtonian cosmology) Im Jahr 1934 konnten die beiden Astrophysiker MILNE und MCCREA zeigen, daß die Friedmann-Gleichungen, die das Verhalten eines homogenen und isotropen Universums beschreiben, auch mit der einfachen Newtonschen Theorie – zumindest näherungsweise – hergeleitet werden können.

Orthodrome siehe: Großkreis

Partikel-Horizont (engl.: Particle horizon) Der Partikel-Horizont ist die maximale Entfernung von Objekten – Galaxien – von denen uns das Licht noch erreichen kann. Er trennt die beobachtbaren von den nicht beobachtbaren Regionen des Universums. Die Eigenschaft des Partikel-Horizonts hängt von dem →kosmologischen Modell ab.

Pekuliarbewegung (engl.: Peculiar motion) In der Kosmologie spricht man von Pekuliarbewegung, wenn eine Geschwindigkeitsrichtung z.B. einer entfernten Galaxie nicht alleine durch die Expansion des Universums erklärt werden kann. So zeigen die Bewegungen von Galaxien in einem weit entfernten Galaxienhaufen nicht nur kosmologische \rightarrow Fluchtgeschwindigkeit, sondern eine Bewegung um ihren gemeinsamen Schwerpunkt – ihre Pekuliarbewegung.

Periheldrehung (engl.: Perihelion shift) Die Ellipse, auf der sich die Planeten um die Sonne bewegen, hat einen sonnennächsten Punkt – das Perihel – und einen sonnenfernen Punkt – das Aphel. Beim Merkur hat sich nun gezeigt, daß seine Ellipse nicht fest im Raum orientiert ist, sondern daß sein Perihel sich um die Sonne dreht, die Periheldrehung des Merkur. Sie beträgt 5,74 Bogensekunden pro Jahr. Bei dem Versuch einer Erklärung dieser Drehung als Störung der anderen Planeten bleibt ein unerklärlicher Rest von 0,43 Bogensekunden pro Jahr. Erst EINSTEIN gelang es, diese Differenz mit Hilfe seiner Allgemeinen Relativitätstheorie zu erklären.

Perioden-Leuchtkraft-Beziehung (engl.: Period-luminosity relation) siehe Cepheiden.

Photon (engl.: Photon) Das Photon ist das Elementarteilchen der elektromagnetischen Wechselwirkung und die Basis des Lichtes und aller elektromagnetischer Strahlung. Es ist ebenfalls der Träger der elektromagnetischen Kraft. Aufgrund der Welle-Teilchen-Dualität zeigt das Photon sowohl Teilchen- als auch Welleneigenschaften.

Photonengas (engl.: Photon gas) Photonengas ist in der Physik eine gasartige Ansammlung von Photonen mit Eigenschaften wie gewöhnliches Gas, z.B. Wasserstoff- oder Heliumgas, Eigenschaften, wie Druck, Temperatur oder Entropie.

Pion (engl.: Pion) Auch Pi-Meson genannt ist das leichteste Teilchen der Mesonen. Es tritt in drei Variationen, eines ohne Ladung, π^0 , eines mit negativer Ladung, π^- und sein Antiteilchen π^+ . Es sind Teilchen mit extrem kurzer mittlerer Lebensdauer.

Planck-Ära (engl.: Planck epoch) Die extrem kurze Zeitspanne ganz zu Beginn des Urknalls – 10^{-44} Sekunden lang – nennt man Planck-Ära. Dort müssen Bedingungen herrschen, die weder mit den bekannten Gesetzen der Quantenphysik noch mit denen der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben werden können. Mit Hilfe der (noch hypothetischen) Theorie der \rightarrow Quantenloop-Theorie hofft man die Verhältnisse während der Planck-Ära beschreiben zu können.

Planck-Einheiten (engl.: Planck units) Im Jahr 1913 zeigte MAX PLANCK, daß sich aus den Naturkonstanten Gravitationskonstante G , der Lichtgeschwindigkeit c und dem Planckschen Wirkungsquantum $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ durch geeignete

Kombination natürliche Einheiten für die Länge, die Zeit, die Masse und viele andere physikalischen Einheiten bilden lassen. Die so gebildeten Einheiten bilden die Grenze der Anwendbarkeit der bislang bekannten Gesetze der Physik.

Positron (engl.: Positron) Das Positron ist das Antiteilchen des Elektrons, deshalb auch Antielektron genannt. Es hat die gleiche Masse und Spin wie das Elektron, aber eine positive Ladung. Kommen Elektron und Positron zusammen, so zerstrahlen sie, es findet eine \rightarrow Annihilation statt.

Quantenloop-Theorie (engl.: Loop quantum gravity) auch Schleifenquantengravitation ist ein Ansatz (unter mehreren) einer Theorie, Quantentheorie und Allgemeine Relativitätstheorie zu vereinen.

Raum-Zeit-Diagramm (engl.: Spacetime diagram) Der Mathematiker MINKOWSKI erweiterte ein 3-dimensionales (Raum-) Koordinatensystem um die Zeit-Achse zu dem 4-dimensionalen Raum-Zeit-Diagramm, um die speziellen Eigenschaften von Raum und Zeit im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie anschaulich zu machen.

Raumzeit (engl.: Spacetime) oder auch Raum-Zeit-Kontinuum genannt, ist in der Relativitätstheorie die Verbindung von Raum und Zeit zu einer homogenen Struktur; das dieses Kontinuum beschreibende Koordinatensystem ist das \rightarrow Raum-Zeit-Diagramm.

Rekombination (engl.: Recombination) In der Physik versteht man unter Rekombination die Verbindung von z.B. Elektronen mit einem positiv geladenen Kern zu einem neutralen Atom. In der Kosmologie bezeichnet dieser Begriff auch den Zeitpunkt im frühen Universum, an dem sich die freien Elektronen mit den positiv geladenen Protonen zu neutralem Wasserstoff oder mit den Heliumkernen zu neutralem Helium verbinden. Ab diesem Zeitpunkt wird das Universum durchsichtig und die vorhandene Strahlung können wir heute als \rightarrow Hintergrundstrahlung nachweisen.

Relativitätsprinzip (engl.: Principle of relativity) besagt, daß die Naturgesetze in allen relativ zueinander bewegten Systemen die selbe Form haben. In der klassischen Physik und der Speziellen Relativitätstheorie gilt diese Prinzip nur für gleichförmig bewegte Systeme. Mit der Allgemeinen Relativitätstheorie konnte EINSTEIN es auch für beschleunigte Systeme erweitern.

Rückwärtslichtkegel (engl. Backward lightcone) Jeder Punkt in einem \rightarrow Raum-Zeit-Diagramm entspricht einem Ereignis E an einem bestimmten Ort mit den Koordinaten (x, y, z) zu einer bestimmten Zeit t . Der Rückwärtslichtkegel nun bezeichnet die Menge aller Ereignisse E' im Raum-zeit-Diagramm, die höchstens mit Lichtgeschwindigkeit einen Einfluß auf E ausüben können. Der Vorwärtslichtkegel bezeichnet alle Ereignisse E'' im Raum-Zeit-Diagramm, auf die das Ereignis E höchstens mit Lichtgeschwindigkeit (in der Zukunft) einwirken kann.

Schwache Wechselwirkung (engl.: Weak interaction) siehe Grundkräfte.

Schwarzer Körper (engl.: Black body) ist in der Physik ein Körper, der die Strahlung, die auf ihn trifft, vollständig absorbiert und zwar über alle Wellenlängen der Strahlung. Das Spektrum der Strahlung, die er emittiert, hängt nur von seiner Temperatur ab.

Schwarzes Loch (engl.: Black hole) Ist bei einem Objekt, z.B. im Universum, seine Gravitation so hoch, daß nicht einmal Licht aus seiner Anziehungskraft entweichen kann. Die Grenze ab der das geschieht, nennt man →Ereignishorizont. Die Entfernung zwischen Mittelpunkt des schwarzen Loches und dem Ereignishorizont bezeichnet man als Schwarzschild-Radius. Wäre die Masse der Erde in einem schwarzen Loch komprimiert, so wäre der Schwarzschild-Radius 9 mm groß, für die Sonne immerhin ca. 3 km. Im Zentrum von massereichen Galaxien vermutet man schwarze Löcher einer Masse von Millionen Sonnenmassen.

Schwarzschildradius (engl.: Schwarzschild radius) siehe schwarzes Loch.

Schwellentemperatur (engl.: Threshold temperature) Als Schwellentemperatur bezeichnet man den (Temperatur-) Wert, der sich ergibt, wenn man die Ruheenergie eines Teilchens ($E_0 = m_0 \cdot c^2$) durch die Boltzmann-Konstante ($k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$) dividiert. Oberhalb dieser Temperatur kann ein Teilchen spontan aus der thermischen Strahlung entstehen. So können bei einer Temperatur von mehr als 6 Milliarden Kelvin z.B. Elektronen oder Positronen spontan entstehen.

Schwere Masse (engl.: Gravitational mass) Ein Körper hat sowohl eine *schwere* Masse, hervorgerufen durch die Gravitation, als auch eine *träge* Masse, die sich im Widerstand gegen eine Änderung des Bewegungszustandes äußert. Experimentell hatte schon NEWTON die (wertmäßige) Gleichheit von schwerer und träger Masse nachgewiesen. Erst EINSTEIN konnte die Gleichheit durch das →Äquivalenzprinzip in der Allgemeinen Relativitätstheorie erklären.

SI-Einheiten (engl.: SI units, engineering units) basieren auf dem internationalen Einheitssystem für physikalische Größen; Basiseinheiten sind Meter für Länge [m], Kilogramm für Masse [kg], Sekunden für die Zeit [s], Ampere für die Stromstärke [A], Kelvin für Temperatur [K], Mol für die Stoffmenge [mol] und Candela für die Lichtstärke [cd]. Alle anderen physikalischen Einheiten können daraus abgeleitet werden, z.B. die Kraft, in Newton [N] gemessen, ist in SI-Basiseinheiten ausgedrückt [m kg s^{-2}].

Skalenfaktor (engl.: Scaling factor) ist ein kosmologischer Parameter der in der →FLRW-Metrik auftaucht und die Expansion beschreibt. Er hängt von der Zeit ab; in diesem Skriptum wird er als $a(t)$ bezeichnet. Normalerweise wird der Skalenfaktor zum heutigen Zeitpunkt t_0 auf eins normiert: $a(t_0) = 1$.

Standardkerzen (engl.: Standard candle) sind astronomische Objekte, die eine bekannte absolute →Helligkeit haben. Aus der gemessenen scheinbaren Helligkeit kann man dann ihre Entfernung bestimmen. Wichtige Standardkerzen sind die →Cepheiden und Supernovae vom Typ 1a.

Standardmodell (engl.: Standard model) siehe Λ CDM-Modell

Starke Wechselwirkung (engl.: Strong interaction) siehe Grundkräfte.

Steady-State-Theorie war eine kosmologische Hypothese, die den Urknall leugnete und ein Universum postulierte, das immer gleichartig ist; eine allgemeine Flucht der Galaxien wurde zwar angenommen, mußte aber mit einer permanenten Erzeugung von Materie aus dem Nichts begründet werden. Nachdem diese Theorie die →Hintergrundstrahlung nicht erklären konnte, geriet sie ins Abseits und ist heute obsolet.

Sternpopulation (engl.: Stellar population) Sterne von Galaxien kann man entsprechend ihres „Metall“gehaltes in Klassen einteilen, eben die Sternpopulationen; die Astronomen bezeichnen alle Element schwerer außer Wasserstoff und Helium als „Metalle“. Als *Population I* bezeichnet man junge stabile Sterne, die wie die Sonne relativ viele schwere Elemente enthalten, die in vorhergehenden Sternenerationen erzeugt wurden. Sterne der *Population II* haben einen sehr geringen Anteil an schweren Elementen, sind also relativ alt und werden vorwiegend im Zentrum von Galaxien und deren Halo gefunden.

Strahlungs-Ära (engl.: Radiation era) In der Strahlungs-Ära überwiegt im Universum die Energiedichte der Strahlung die der Materie. Dies ist im frühen Universum der Fall, während der Zeit vom Urknalls bis 100.000 Jahren danach.

Träge Masse (engl.: Inertial mass) siehe schwere Masse.

Vakuumenergiedichte (engl.: Vacuum energy density) siehe kosmologische Konstante.

Vorwärtslichtkegel (engl.: Forward light cone) siehe Rückwärtslichtkegel.

Weltlinie (engl.: World line) In der →Raumzeit repräsentiert die zeitliche Entwicklung eines Objektes eine Kurve im →Raum-Zeit-Diagramm, die Weltlinie des Objektes.

z-Wert (engl.: Redshift z) Durch den z -Wert wird das Maß der Rotverschiebung einer elektromagnetischen Welle, die von einer bewegten (Licht-) Quelle ausgesandt wird, beschrieben. Sei λ_{beob} die beobachtete Wellenlänge und λ_0 die Wellenlänge mit der die Strahlung ausgesandt wird, dann ist der z -Wert definiert als

$$z = \frac{\lambda_{beob} - \lambda_0}{\lambda_0}.$$

zeitartig (engl.: Time-like) Die Bereiche, die durch den \rightarrow Rückwärts- und \rightarrow Vorwärtslichtkegel im \rightarrow Raum-Zeit-Diagramm eingeschlossen sind, werden als zeitartig bezeichnet. In den zeitartigen Bereichen befinden sich die physikalisch relevanten Ereignisse und \rightarrow Weltlinien.

Zeitdilatation (Time dilation) ist ein Effekt der Speziellen Relativitätstheorie, nach dem in einem relativ zu einem ruhenden \rightarrow Inertialsystem gleichförmig bewegten die Zeit langsamer vergeht. In der Allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnet die *gravitative Zeitdilatation* die Tatsache, daß in einem Gravitationsfeld die Zeit langsamer vergeht als außerhalb.

Index

- absolute Zeit, 1, 21, 104
- absoluter Raum, 1, 21
- Additionstheorem der Geschwindigkeiten, 9
- Äquivalenzprinzip, 22, 23, 26, 29, 40, 161
 - schwaches, 27
 - starkes, 27, 39
- Alpher, Ralph , 119
- Andromeda-Galaxie, 65
- Annihilation, 131, 161
- anthropisches Prinzip, 138, 161
- Antimaterie, 132
- Antineutrino, 131
- Anziehungskraft, 21, 23
- Apollo-Mission, 24
- Astronomie, 44, 48
- Astrophysik, 48
- Atom, 73
- Atomkern, 73
- Axiom, 31
- Axion, 162

- Baade, Walter, 67
- Baryonen, 132, 161
- Baryonische Materie, 125
- Beobachtung, 6
- Beschleunigung, 39, 85
- Beschleunigungsgleichung, 91, 93
- Bewegungsgesetz, 39
- Bezugssystem, 6, 21, 161
- Bezugssystem, Galileisches, 29
- big bang, 95, 127
- big chill, 102
- big crunch, 98, 101
- Blauverschiebung, 65, 82, 162
- Bogenelement, 77, 147
- Bolay, János, 31
- Boltzmann-Konstante, 87, 131
- Breitengrad, 33
- Bremsfunktion, 91, 95, 100, 102, 106, 124
- Carter, Brandon, 161
- CDM, 162
- Cepheiden, 66, 67, 114, 118, 161
- CERN, 135, 141
- Christoffel, Elwin Bruno, 31
- Christoffelsche Symbole, 39
- COBE, 119
- Comoving distance, 163
- Corioliskraft, 21, 162
- Coulombkraft, 73, 162

- dark matter, 119, 162
- de Broglie-Wellen, 48
- de Sitter, Willem, 61, 65
- de Sitter-Effekt, 61
- de Sitter-Metrik, 61
- Deuterium, 129
- Dezelerationsfunktion, 91
- Dicke, Robert H., 119
- Differentialgeometrie, 17, 20, 32, 36, 37
- Differentialoperator, 40
- Distanzmodul, 115, 123, 162
- Doppler-Effekt, 162
 - klassischer, 65
 - relativistischer, 68, 115, 124
- Dreieck, 32
- dunkle Energie, 125, 162
- dunkle Materie, 55, 119, 125, 162
- Dyson, Frank Watson, 45

- Eddington, Sir Arthur Stanley, 45, 60, 61, 64
- Eddington-Lemaître Universum, 65, 126

- Eichhyperbel, 11
 Eigenabstand, 70, 75, 80, 103, 106, 108, 113, 163
 Eigengeschwindigkeit, 80, 103, 163
 Eigenzeit, 14, 103, 163
 Einstein-de Sitter Modell, 68, 94–97, 104–112, 117, 124, 128, 140, 144
 Einstein-de Sitter-Kontroverse, 62
 Einstein-Tensor, 41
 Eisen, 122
 elektromagnetische Wechselwirkung, 134, 163
 Elektron, 131
 Elektronenpaare, 131
 elektroschwache Wechselwirkung, 134
 Elem, 134, 136
 Ellipsoid, 36
 Emissionsabstand, 75, 163
 Energie
 kinetische, 50, 84
 potentielle, 50, 84
 thermische, 87
 Energie-Impuls-Tensor, 40, 44, 53, 62, 163
 Energiedichte, 84, 85, 87
 Energieerhaltung, 86
 Energiesatz, 84
 Entfernung, raum-zeitliche, 11
 Entfernungsbestimmung, 66
 Eötvös, Loránd, 22, 24
 Erdbeschleunigung, 48
 Ereignis, 4, 10, 37, 64, 75
 Ereignishorizont, 50, 96, 163
 Erhaltungssatz, 43
 escape velocity, 164
 Euklid, 20, 31
 Event, 4, 10, 64, 75
 Event-Horizont, 109
 Expansion, 55, 122, 137
 falsches Vakuum, 136, 164
 Feldgleichungen, 38, 42, 55, 62, 79, 82
 Fernwirkung, instantane, 22, 164
 Flachheits-Problem, 136, 138, 143, 164
 Fläche
 hyperbolische, 149
 Flächenwesen, 152
 flatness problem, 138
 FLRW-Metrik, 65, 80, 126, 164
 Fluchtgeschwindigkeit, 50, 72, 81, 103, 111, 113, 124, 141, 164
 Fluidgleichung, 86, 93
 freier Fall, 24, 28
 Friedmann Universum, 97–98, 137
 Friedmann, Alexander, 33, 44, 55, 62–64, 69, 80, 82
 Friedmann-Gleichung, 63, 65, 84–143
 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik, 65, 80
 Fundamentaltensor, 41
 Galaxienhaufen, 55, 73
 Galilei, Galileo, 24
 Galilei-Transformation, 1
 Galileisches Bezugssystem, 29
 Gamow, George, 119, 127
 Gauß, Carl Friedrich, 31
 Gedankenexperiment, 26
 Geodäte, 36, 38, 61, 71, 81, 164
 Geodätengleichung, 39
 geometria intrinseca, 33
 Geometrie
 Euklidische, 11, 17, 30, 31, 33, 34, 46, 78, 138, 147, 153
 nicht-Euklidische, 31
 pseudo-Euklidische, 11, 17, 28, 31, 44
 Riemannsche, 57
 geometrische Einheiten, 4, 43, 158, 164
 Gerade, 32, 34
 Geschwindigkeits-Entfernungs-Gesetz, 69, 72, 80, 103, 111, 113, 115, 163, 165
 Gespenster-Sonnen, 60
 Gleichzeitigkeit, 1, 21
 Gleichzeitigkeit, relative, 7
 Gluonen, 133, 136, 165
 gold dataset, 122
 Gradient, 40
 grand unified theories, 132
 Gravitation, 23, 73, 165
 Gravitationsfeld, 22, 39, 44, 46, 48
 Gravitationsgesetz
 Einstein, 42, 46
 Newton, 21, 39, 45

- Gravitationskonstante, 21, 40, 43, 46, 49, 84, 158, 172
Gravitationskraft, 25, 155
Gravitationslinsen, 170
Gravitationspotential, 39
Gravitationswellen, 57
Grenzeschwindigkeit, 5, 21
Große vereinheitlichte Theorien, 132
Großkreis, 33, 35, 71, 74, 165
Grundkräfte, 134, 165
GUT, 132, 165
GUT-Ära, 133, 136
Guth, Alan, 136
- Hadron, 131, 166
Hadronen-Ära, 131
Hauptsatzes der Thermodynamik, 86
Hawking, Stephen, 50
HDM, 163
Heckmann, Otto, 98
Helium, 122
Helligkeit, 166
 absolute, 112, 115
 scheinbare, 110, 112, 115
Herman, Robert, 119
Himmelsmechanik, 45
Hintergrundstrahlung, 88, 119, 123, 126–128, 131, 138, 166
Hochenergiephysik, 133
homogen, 55, 138
Horizont, 109, 166
Horizont-Problem, 136, 138, 143, 166
Hoyle, Fred, 127
Hubble bubble model, 126
Hubble term, 72, 167
Hubble, Edwin, 43, 55, 66–69, 81, 117
Hubble-Funktion, 69, 72, 80, 90, 95, 100, 102, 104, 112, 141, 167
Hubble-Konstante, 67, 72, 81, 85, 95, 105, 117, 122, 125, 141, 167
Hubble-Länge, 72, 96, 105, 109, 140, 141, 167
Hubble-Parameter, 167
Hubble-Periode, 95, 105, 167
Hubble-Sphäre, 72, 96, 105, 109, 137, 140, 141, 168
Hubble-Zeit, 111
Hubblesches Gesetz, 67
- Hyperbel, 11
Hyperbelfunktion, 150
Hypersphäre, 58, 65, 149, 168
- ideales Gas, 86
Inertialsystem, 6, 20, 25, 28, 29, 168
Inertialsystem, lokales, 28, 38, 75
Inflation, 133, 136–140, 143, 168
Inflations-Faktor, 137
Invariantentheorie, 35
isotrop, 55, 138
- Kant, Imanuel, 1, 31
Kant-Laplacesche-Theorie, 65
Kernkraft, 73
kinetische Energie, 50
klassische Mechanik, 22, 38, 45, 155
Klein, Felix, 60
Koordinate, 64
Koordinaten, mitbewegte, 77
Koordinatendistanz, 77, 80, 82, 104
Kopernikanisches Prinzip, 55, 77
Korrespondenzprinzip, 38
Kosmokinematik, 80–82
Kosmologie, 54, 147
kosmologische Konstante, 42, 58, 84, 89, 92, 143, 162, 168
kosmologische Modelle, 42, 85, 104, 118, 168
kosmologisches Prinzip, 56, 76, 80, 93, 109, 126, 168
Kraft, 39
Kreisbogen, 153
kritische Energiedichte, 85, 169
kritische Masse, 97
kritische Massendichte, 85, 169
Krümmung, 32, 41, 147, 169
 Euklidisch, 147
 extrinsische, 32, 153
 intrinsische, 32, 153
 negative, 147
 positive, 147
Krümmungskonstante, 79, 138, 151
Krümmungsradius, 58, 62, 71, 85, 138
Kugelkoordinaten, 49, 149, 169
Kugeloberfläche, 32, 33, 53, 70, 147, 148, 153

- LambdaCDM-Modell, 68, 103, 114, 124, 125, 169
 Laplace-Operator, 40
 Large Hadron Collider, 135, 141
 Leavitt, Henrietta Swan, 66
 Lemaître, Georges, 64–65, 69, 80, 82
 Leptonen, 131, 169
 Leptonen-Ära, 130
 Leuchtkraft, 114, 169
 Cepheiden, 66
 Sonne, 158
 Leuchtkraftentfernung, 114, 123, 170
 Levi-Civita, Tullio, 31, 37
 LHC, 135, 141
 Lichtablenkung, 45, 53, 60, 155, 170
 Lichtgeschwindigkeit, 141
 Lichtkegel, 104
 Linde, Andrei, 143
 Linienelement, 79
 lookback time, 112, 113
 Lorentz-Kontraktion, 9, 29
 Lorentz-Transformation, 1, 3, 9, 15, 29, 38
 Luminosity, 166
 luminosity distance, 114
 Lundmark, Knut Emil, 66

 M31, 65
 Mößbauer-Effekt, 47
 MACHOS, 162
 magnetischer Monopol, 136, 170
 Mannigfaltigkeit, 37, 39, 170
 pseudo-Riemannsche, 37, 75
 Riemannsche, 36, 37, 44, 78, 147, 153
 Masse
 Elelektron, 158
 Erde, 43, 47, 158
 Proton, 158
 schwere, 24, 40
 Sonne, 46, 50, 158
 träge, 24, 40
 Massendichte, 40, 85, 128
 Massenpunkt, 44
 Materie-Ära, 129, 170
 materiedominiert, 91, 112, 129
 Materiewellen, 48
 McCrea, William, 82
 de Sitter, 61
 Einstein, 58
 Euklidische, 53
 FLRW, 80
 Robertson-Walker, 62
 Schwarzschild, 54, 61
 metrischer Tensor, 20
 Michell, John, 50
 Milchstraße, 54, 66
 Milne, Edward, 82
 Minkowski, Hermann, 17
 Minkowski-Welt, 14, 17, 28, 38, 44, 46, 52, 54, 147
 mitbewegte Koordinaten, 77, 171
 Monopol-Problem, 136, 171
 Mount-Wilson-Observatorium, 66
 Myon, 131, 171

 Nablaoperator, 40
 Nebel, 65
 negativer Druck, 93, 102, 136
 Neutralino, 162
 Neutrino, 131
 Neutronenstern, 54
 Newton, Isaac, 1, 21, 24, 39, 54
 Newtonsche Gesetz, 83
 Newtonsche Kosmologie, 83–84, 171
 Newtonsche Theorie, 54, 82
 Newtonsches Gesetz, 24, 43
 Nukleosynthese, 122, 130, 132
 Null-Geodäte, 104
 Orthodrome, 35, 171
 Ortsvektor, 15

 Parallele, 32
 Parallelenaxiom, 20, 32
 Partikel-Horizont, 109, 171
 Peebles, Philip J.E. , 119
 Pekuliarbewegung, 65, 172
 Pekuliargeschwindigkeit, 72
 Penzias, Arno, 119
 Periheldrehung, 45, 53, 60, 172
 Perioden-Leuchtkraft-Beziehung, 66, 172
 Perlmutter, Saul, 124
 Phasenübergang, 134, 136
 Photon, 48, 156, 172

- Photonengas, 88, 172
Pion, 131, 172
Planck, Max, 158
PLANCK, Weltraumteleskop, 119
Planck-Ära, 129, 134, 172
Planck-Einheiten, 134, 158, 172
Planck-Länge, 160
Planck-Masse, 159
Planck-Temperatur, 160
Planck-Zeit, 144, 160
Planetensystem, 65
Poisson-Gleichung, 40
Polarkoordinaten, 80, 148
Positron, 131, 173
potentielle Energie, 50
Pound, R. V., 47
Pound-Rebka-Experiment, 47
Proper distance, 163
Pythagoras, 147
- quadratische Form, 18
Quantengravitation, 134
Quantenloop-Theorie, 134, 173
Quantentheorie, 48
Quark-Ära, 133
Quasar, 55, 110
- Raum
 Euklidischer, 36, 39
 expandierender, 69–75, 104
 flach, 20, 78, 147
 gekrümmt, 20, 31, 48, 71
 geschlossener, 58, 147
 hyperbolischer, 79, 98
 negativ gekrümmt, 78
 offener, 147
 positiv gekrümmt, 78
 Riemannscher, 31
Raum-Zeit-Diagramm, 2, 56, 59, 107,
 139, 173
raumartig, 10
Raumkomponente, 16
Raumzeit, 37, 41, 64, 173
Rebka, G. A. Jr., 47
recessional velocity, 164
Rekombination, 88, 120, 128, 173
relative Gleichzeitigkeit, 21, 22
Relativitätsprinzip, 21, 26, 173
Relativitätstheorie
 Allgemeine, 36–38, 147
 Spezielle, 22, 37, 38
Ricci-Curbastro, Gregorio, 31, 37
Ricci-Skalar, 41
Riemann, Bernhard, 20, 31, 37
Riemann-Tensor, 41
Riess, Adam, 124
Robertson, Howard Percy, 69
Robertson-Walker-Metrik, 62, 80, 103
Rotationsellipsoid, 35
Rotverschiebung, 43, 65, 66, 68, 81,
 92, 104, 110, 122, 124, 162
 Gravitation, 47
Rückwärtslichtkegel, 5, 10, 56, 75, 104,
 107, 108, 110, 173
Ruheenergie, 131
RW-Metrik, 80
- Sattelfläche, 36, 78, 149
Schallhorizont, 121
Schmidt, Brian P., 124
schwache Wechselwirkung, 134, 174
schwarzer Körper, 125, 174
schwarzes Loch, 49, 50, 54, 174
 mittlere Dichte, 51
Schwarzschild, Karl, 48
Schwarzschildmetrik, 49, 53, 61
Schwarzschildradius, 50, 54, 96, 157,
 159, 174
Schwellentemperatur, 131, 174
Schwere, 26
schwere Masse, 24, 174
Schwerebeschleunigung, 24, 26
Schwerefeld, 24, 25, 28
Schwerpunktenergien, 135
Seeliger, von Hugo, 45
SI-Einheiten, 43, 158, 174
Skalenfaktor, 71, 77, 100, 104, 105, 126,
 128, 137, 140, 141, 174
Slipher, Vesto, 65
Soldner von, Johann Georg, 45
Sonnenatmosphäre, 47
Sonnenfinsternis, 27
Sonnensystem, 42, 54
Spektrallinie, 47, 67
Spektrum, 65

- Spezielle Relativitätstheorie, 25, 28, 68, 75, 104
 Sphäre, 148
 Spiralnebel, 66
 Standardkerzen, 66, 114, 115, 118, 122, 175
 Standardmodell, 103, 175
 Standardmodell der Kosmologie, 113, 124, 142
 starke Wechselwirkung, 134, 175
 Staub, 87
 Steady-State-Theorie, 127, 175
 Sternhaufen, 65
 Sternpopulation, 67, 175
 Strahlungs-Ära, 129, 175
 Strahlungsdichte, 128
 strahlungsdominiert, 90, 129
 Strahlungsstrom, 114
 Strahlungstemperatur, 128
 String-Theorie, 134
 Summenkonvention, 18, 49
 Super-Protonen-Synchrotron, 135
 Supernova, 122
 Supernova vom Typ 1a, 114, 115, 122

 Tangentenvektor, 32
 Tauon, 131
 Teilchenbeschleuniger, 135
 Teilchendichte, 73, 128
 Teleologie, 161
 Tensor
 metrischer, 18, 35, 39, 41, 44, 52, 148
 Tensorkalkül, 32
 thermodynamisches Gleichgewicht, 137
 Thomson-Effekt, 125
 Torsionswaage, 24
 Träge Masse, 24, 175
 Trägheit, 26
 Trägheitskraft, 25
 Turner, Michael S., 162

 Überlichtgeschwindigkeit, 72, 105, 139
 Universum
 expandierend, 62, 69, 124
 flaches, 85, 100, 123, 138
 hyperbolisches, 98, 100
 materiedominiert, 87, 94–100
 sphärisches, 97, 100
 statisch, 58, 62, 65, 69, 109, 126
 strahlungsdominiert, 100–101
 Unschärferelation, 159
 Unterkühlung, 136
 Unterlichtgeschwindigkeit, 105
 Uratom, 126
 Urknall, 74, 95, 103, 119, 124, 127–134, 161

 Vakuumenergiedichte, 175
 Vektor, 15
 Vektoralgebra, 17
 Verrier, Urbain Jean Joseph, 45
 Vierervektoren, 17
 Vorwärtslichtkegel, 5, 10, 104, 175

 Wasserstoff, 122
 Wasserstoffatom, 128
 Wechselwirkung
 elektromagnetische, 25, 134
 elektroschwache, 134
 schwache, 25, 134
 starke, 25, 134
 Wellenlänge, 81
 Weltalter, 95, 103, 117
 Weltlinie, 3, 4, 20, 75, 175
 Weltperiode, 63
 Weltraumteleskop PLANCK, 119
 Wilson, Robert, 119
 WIMPS, 162
 Winkelsumme, 32, 148
 Wirkungsquantum, 158, 172
 WMAP, 119, 138
 world map, 103, 115
 world picture, 104

 z-Wert, 66, 82, 92, 123, 124, 175
 zeitartig, 10, 53, 176
 Zeitdilatation, 9, 31, 176
 Zeitkomponente, 16
 Zentrifugalkraft, 21
 Zerstreuungstendenz, 61, 65
 Zustandsgleichung, 87
 Zwicky, Fritz, 118
 Zylinderfläche, 32
 Zylinderwelt, 60

Literaturverzeichnis

- [1] ABBOTT, E. A.: *Flatland: A Romance of Many Dimensions*. Classic Fiction Series. Digireads.com Publishing, Stilwell, 2005. Auflage. 32
- [2] ADE, P. und ET.AL.: *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*. <http://arxiv.org/pdf/1303.5076v1.pdf>, 20.03.2013. viii, 69, 119, 120, 125, 127
- [3] ASTIER, P. und J. GUY ET.AL.: *The Supernova Legacy Survey: Measurement from the First Year Dataset*. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0510447v1>, 14.10.2005 2005. 123
- [4] BARTELMANN, M.: *The Dark Universe*. <http://arxiv.org/pdf/0906.5036>, 27.06.2009 2009. 90
- [5] BAUGHER, C. E.: *Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser*. Phys. Rev. Lett., 45(26):2081–2084, December 1980. 48
- [6] BORN, M.: *Die Relativitätstheorie Einsteins*. Springer, Berlin Heidelberg, 2003. 7. Auflage. 2, 19, 33, 35, 161
- [7] BRONSTEIN, I. und K. SEMENDJAJEV: *Taschenbuch der Mathematik*. Haai Deutsch, Frankfurt, 2001. 5. Auflage. 18, 19
- [8] DYSON, F., A. EDDINGTON und C. DAVIDSON: *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919*. Philos. Trans. Royal Soc. London, 220:291–333, 1920. v, 45
- [9] EDDINGTON, A.: *On the instability of Einstein's spherical world*. Month. Not. Roy. Astron. Soc., 90:668–678, 1930. 61
- [10] EINSTEIN, A.: *Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. In: H.A. LORENTZ, A. EINSTEIN, H. MINKOWSKI – *Das Relativitätsprinzip - Eine Sammlung von Abhandlungen*, S. 81–124. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1958. 6. Auflage. v, 2, 16, 23, 29, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 52, 58
- [11] EINSTEIN, A.: *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*. In: H.A. LORENTZ, A. EINSTEIN, H. MINKOWSKI – *Das*

- Relativitätsprinzip - Eine Sammlung von Abhandlungen*, S. 130–139. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1958. 6. Auflage. v, 42, 58, 60
- [12] EINSTEIN, A.: *Über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*. Mathematik und Physik. Vieweg, Braunschweig, 1979. 21. Auflage. 26
- [13] EINSTEIN, A.: *Grundzüge der Relativitätstheorie*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002. 6. Auflage. 26, 31, 41
- [14] EINSTEIN, A.: *Mein Weltbild*. Ullstein, 2005. 30. Auflage. 2, 21, 22, 23
- [15] EINSTEIN, A.: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. In: RENN, J. (Hrsg.): *Einstein's Annalen Papers*, S. 194 – 224. Wiley-VCH, Weinheim, 2005. 1. Auflage. 1, 3, 16, 20, 29
- [16] EINSTEIN, A. und L. INFELD: *Die Evolution der Physik*. Zsolnay, Wien, Hamburg, 1969. 1. Auflage. 1
- [17] FREEDMAN, W. und M. TURNER: *Colloquium: Measuring and understanding the universe*. Rev. Mod. Phys., 75(4):1433–1447, October 2003 2003. 97, 98
- [18] FRIEDMANN, A.: *Über die Krümmung des Raumes*. Z. Phys., 10:377–386, 1922. 63, 64, 65, 83, 85, 95
- [19] FRIEDMANN, A.: *Die Welt als Raum und Zeit*, Bd. 287 d. Reihe *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*. Harri Deutsch, Frankfurt, 2006. 3. Auflage. 33, 44, 56, 63
- [20] GÖHRING, R.: *Spezielle Relativitätstheorie - Skriptum zum Seminar des Physikalischen Vereins*. <http://www.physikalischer-verein.de/veranstaltungen.htm>, 17.10.2009 2009. 2, 6, 9, 17, 29, 69
- [21] GOLDSTEIN, H.: *Klassische Mechanik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1963. Auflage. 156, 157
- [22] GREEN, B.: *Das elegante Universum*. Goldmann, München, 2006. 3. Auflage. 21, 23
- [23] GUTH, A.: *Die Geburt des Kosmos aus dem Nichts*. Knauer, München, 2002. 1. Auflage. 137
- [24] HARRISON, E.: *Cosmology*. University Press, Cambridge, 2000. 2. Auflage. 61, 63, 84, 94, 102, 104, 105, 110, 128, 130, 133, 137, 138, 139, 162
- [25] HUBBLE, E.: *A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S., 15(3):169–173, März 1929. 67, 68, 69

- [26] KAY, D. C.: *Theory and Problems of Tensor Calculus*. Schaum's outlines. McGraw-Hill, 1988. 1. Auflage. 14
- [27] KOLB, E. W. und M. S. TURNER: *The Early Universe*. Frontiers in Physics. Westview Press, 1990. 1. Auflage. 131
- [28] KRAUS, U.: *Tempolimit Lichtgeschwindigkeit*. <http://www.tempolimitlichtgeschwindigkeit.de/>, 17.11.2006 2006. 6
- [29] KRAUTTER, J.: *Meyers Handbuch Weltall*. Meyers Lexikonverlag, Mannheim, 1994. 7. Auflage. 132
- [30] LANG, K.: *Astrophysical Formulae*. Springer Verlag, Heidelberg, 1980. 2. Auflage. 68, 90, 129
- [31] LAUE, M. v.: *Die allgemeine Relativitätstheorie*, Bd. 68 d. Reihe *Die Wissenschaft*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1956. 4. Auflage. 49, 53, 81
- [32] LAUE, M. v.: *Die Relativitätstheorie*, Bd. 1. Die spezielle Relativitätstheorie d. Reihe *Wissenschaft*. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1961. Auflage. 9
- [33] LEMAÎTRE, G.: *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant*. Anna. Soc. Scient. Brux., 47(A):49–59, 1927. 65, 83, 95
- [34] LEMAÎTRE, G.: *A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae*. Montly Not. Roy. Astron. Soc., (91):483–490, 1931. 65, 66
- [35] LIDDLE, A.: *Einführung in die moderne Kosmologie*. Wiley-VCH, 2009. 90
- [36] LINDE, A.: *Inflationary Cosmology*. <http://de.arxiv.org/abs/0705.0164v1>, 01.05.2007 2007. 144
- [37] MACH, E.: *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. Wiss. Buchges., 1988, Darmstadt, 1988. Reprogr. Nachdruck der 9. Auflage. 1
- [38] MARRA, V. U. E.: *Cosmic variance and the measurement of the local Hubble parameter*. <http://arxiv.org/pdf/1303.3121.pdf>, 20.05.2013. 119, 127
- [39] MILNE, E. und W. MCCREA: *Newtonian universes and the curvature of space*. Quart. J. Math. Oxford, (5), 1934. 83
- [40] MINKOWSKI, H.: *Raum und Zeit*. In: *Das Relativitätsprinzip - Eine Sammlung von Abhandlungen*, S. 54–71. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1958. 6. Auflage. 17
- [41] MISNER, C. W., K. S. THORNE und J. A. WHEELER: *Gravitation*. W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973. 1. Auflage. 3

-
- [42] MÜLLER, H., A. PETERS und S. CHU: *A precision measurement of the gravitational redshift by the interference of matter waves*. *Nature*, (463):926–929, 2010. 48
- [43] NEFFE, J.: *Einstein - eine Biographie*. Rowohlt Verlag, Reinbek bei Hamburg, 2005. 1. Auflage. vi
- [44] NESSERIS, S. und L. PERIVOLAROPOULOS: *Comparison of the Legacy and Gold SnIa Dataset Constraints on Dark Energy Models*. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0511040v3>, 02.12.2005 2005. 123
- [45] PERLMUTTER, S. und B. SCHMIDT: *Measuring Cosmology with Supernovae*. In: WEILER, K. (Hrsg.): *Supernovae and Gamma-Ray Bursters*, Bd. 598 d. Reihe *Springer, Lecture Notes in Physics*, S. 195–217. Springer Verlag, Heidelberg, 2003. 1. Auflage. 103, 104
- [46] POUND, R. und G. REBKA: *Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance*. *Phys. Rev. Lett.*, 9(3):439–441, November 1959. 47
- [47] POUND, R. und J. SNIDER: *Effect of Gravity on Nuclear Resonance*. *Phys. Rev. Lett.*, 13(18):539–540, November 1964. 48
- [48] RENN, J.: *Auf den Schultern von Riesen und Zwergen; Einsteins unvollendete Revolution*. WILEY-VCH, Weinheim, 2006. 1. Auflage. 22, 38, 43
- [49] RÖHLE, S.: *Mathematische Probleme in der Einstein - de Sitter Kontroverse*. <http://www.mpiwg-berlin.mpg.de/Preprints/P210.PDF>, 03.06.2002 2002. 63
- [50] RIESS, A. und G. MARCI, L. ET.AL.: *A 3Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3*. <http://arxiv.org/pdf/1103.2976v1.pdf>, 15.03.2011 2011. 69, 119
- [51] RINDLER, W.: *Visual horizons in world-models*. *Monthl. Not. Roy. Astron. Soc.*, 116:116, 1956. 110
- [52] SANDAGE, A. und G. TAMMANN ET.AL.: *The Hubble Constant: A Summary of the HST Program for the Luminosity Calibration of Type Ia Supernovae by Means of Cepheids*. <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0603647>, 22.08.2006 2006. 119
- [53] SCHUTZ, B. F.: *A first course in general relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. 18. Auflage. 2, 3, 5, 15, 17, 28, 34, 37, 38, 39, 41, 49, 51, 53, 54, 56, 57, 81, 154, 159
- [54] SCHWARZSCHILD, K.: *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie*. *Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin*, S. 424–434, 1916. 54
- [55] SCHWARZSCHILD, K.: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie..* *Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss.*, 1916:189–196, 1916. 49

- [56] SEELIGER, H.: *Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz*. *Astronomische Nachrichten*, 137:131–136, 1894. 46
- [57] SHAPIRO, I., C. COUNSELMAN und R. KING: *Verification of the Principle of Equivalence for Massive Bodies*. *Phys. Rev. Lett.*, (36):555–558, 1976. 24
- [58] SITTER, W. DE: *On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences*. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 77:155–184, 1916. 62
- [59] SOLDNER, J.: *Über die Ablenkung eines Lichtstrals von seiner geradlinigen Bewegung, durch die Attraktion eines Weltkörpers, an welchem er nahe vorbei geht*. *Berliner Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1804*, S. 161–172, 1804. 45
- [60] TEGMARK, M.: *Parallel Universes*. <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0302131v1>, 07.02.2003 2003. 142
- [61] UNSÖLD, A. und B. BASCHEK: *Der neue Kosmos*. Springer Verlag, Heidelberg, 2005. 7. Auflage. 115
- [62] WEINBERG, S.: *Die ersten drei Minuten*. Piper, München, Zürich, 2002. 5. Auflage. 131, 133